ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA



DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

ENERO-MARZO 1927. — ENTREGAS I-III. TOMO CIII

ÍNDICE

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684 — CALLE PERÚ — 684

1927

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los *Anales (personalmente responsables de la tesis que sustentan en sus escritos)* que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarlo por escrito. Tienen, además, derecho a la corrección de dos pruebas. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la Dirección, **Cevallos, 269.** — LA DIRECCIÓN.

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO CIII

Primer semestre de 1927

BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684 — CALLE PERÚ — 684

1927

ESTUDIO ANTROPOLÓGICO

DE 89 MIEMBROS DEL CONGRESO NORTEAMERICANO

POR EL DOCTOR ARTHUR MAC DONALD
Washington, D. C.

Al iniciar esta nueva línea de investigación, que podría ser llamada Antropología legislativa, debemos formular una introducción, indicando el plan general y los propósitos que se persiguen.

El estudio científico del hombre civilizado moderno está en su infancia, aun cuando las investigaciones sobre el hombre prehistórico, salvaje o muerto, han sido proseguidas desde hace largo tiempo. Es hora, por ello, de que el hombre, tal como es hoy, reciba atención científica. El autor ha invertido mucho tiempo en el estudio de individuos anormales, la mayoría de los cuales son fracasados. Uno de los fines de esa investigación es hallar las causas y los remedios de esos fracasos e infortunios. Tal estudio es muy importante, pero todavía es de mayor ventaja el de los que triunfan en la vida, para considerar los fenómenos optimistas más que los pesimistas.

En la investigación del hombre, sea el genial o insano, talentoso o imbécil, virtuoso o criminal, defectuoso o degenerado, en suma, normal o anormal, los métodos científicos son los mismos; de otra manera sería difícil, si no imposible, distinguir entre las diferentes clases de seres humanos con suficiente exactitud.

LOS MIEMBROS DEL CONGRESO COMO OBJETO DE ESTUDIO CIENTÍFICO

Hace treinta años, el autor empezó sus estudios de los individuos normales con la investigación sobre veinte mil escolares de Wáshington, y ha hecho de tiempo en tiempo búsquedas de menor cuantía en-

tre los estudiantes de universidades y colegios y otras clases de ciudadanos. Los miembros del Congreso tienen especial interés no sólo desde el punto de vista político, sino científicamente. Como servidores elegidos del pueblo son de gran importancia, por venir de todas las secciones de los Estados Unidos, son verdaderamente representativos, y ofrecen una buena oportunidad para establecer una posición antropológica relativa de nuestra Nación. Sería imposible estudiar los cien millones, o más, de habitantes de este país. De manera que, para hablar como en matemáticas, podemos considerar, a los fines de la investigación, los quinientos o más miembros del Congreso como una muestra, tomada al azar, de la Nación. Si el Congreso diera el ejemplo, ello ayudaría a que otras naciones empezaran estudios similares de sus cuerpos legislativos, hasta que eventualmente pudiéramos establecer una antropología comparativa de los legisladores modernos, y estaríamos habilitados para distinguir entre los estadistas de diferentes naciones respecto a su posición antropológica relativa. Es probable también que cuando la posición física relativa de la legislatura de una Nación o Estado sea superior a la de la otra Nación o Estado, las condiciones físicas generales de aquella comarca sean superiores también.

OTRAS VENTAJAS DEL ESTUDIO DEL CONGRESO

Este estudio puede ser del mayor beneficio práctico para los mismos miembros del Congreso, pues ciertos médicos especialistas de fama, de Wáshington, han consentido en hacer a cada uno de los miembros del Congreso, gratuitamente pero con fines científicos, las mediciones y los exámenes físico, neurológico, del corazón, de los pulmones, del estómago, de garganta, nariz y oído, de sangre y ojos, cada uno por un especialista. Naturalmente la mayoría de los miembros del Congreso tienen sus médicos, quienes indudablemente pueden diagnosticarles cualquier cosa que sea anormal en ellos, pero cuando hay irregularidades incipientes, que no se perciben todavía, ningún médico *solo* está en condiciones de descubrirlas; estos defectos pequeños generalmente pueden remediarse si se descubren a tiempo, pero si no son descubiertos, están propensos a desarrollarse hasta que se conviertan en un impedimento serio para la salud y la actividad del miembro.

Un fuego incipiente puede ser apagado fácilmente si se descubre a tiempo. Estas ideas son muy familiares, pero, desgraciadamente, a

menudo encierran la verdad y se las descuida frecuentemente. Un miembro del Congreso debe conservarse bien, tanto por sí mismo como por consideración a sus representados. Él es una persona de calidad *(selected timber)* y si se descuida a sí mismo, los médicos están prontos para preservar su persona, aun contra su voluntad.

El miembro dice (más a menudo piensa): « Yo tengo mi médico que me examina ¿por qué he de hacerme ver por esos especialistas? No los necesito, soy un hombre sano y fuerte. » Pero el autor contesta: « Senador, usted se equivoca; cuando se enferme tendrá, tal vez, que verlos. Entonces ¿por qué esperar hasta que esto suceda? ¿Por qué no permitir que cada especialista busque las tendencias enfermas latentes, que es casi seguro que aparecerán con el tiempo y, siguiendo sus indicaciones, alejar todo lo posible su aparición? Unos pocos días empleados (no perdidos) con los especialistas pueden no sólo prolongarle la vida en muchos años, sino también evitarle muchos dolores y enfermedades. »

Las mediciones antropológicas son fundamentales y su utilidad es mayor cuando se hacen conjuntamente con los exámenes físico, neurológico y otros, practicados por especialistas.

ESTE ESTUDIO NO ES UN ENSAYO MENTAL DEL CONGRESO

Puede ocurrírsele a alguien que este estudio es una especie de estudio mental de los miembros del Congreso. Pero no es ese el caso. Como ya se ha dicho, el objeto principal es determinar su posición antropológica relativa, lo que es casi completamente físico, excepto en los experimentos psico-físicos sobre el dolor. Los miembros del Congreso ya han sido ensayados por el pueblo, y aunque éste puede equivocarse ocasionalmente en su elección, generalmente no sucede así. De más de treinta años de vida en Wáshington, y especialmente entre los miembros del Congreso, he sacado el convencimiento de que por lo menos los nueve décimos de los miembros merecen la alta misión que los inviste, pero la vida pública es una labor difícil y la ingratitud es una condición especial de las repúblicas.

En cada Congreso entran unos trenta mil o más proyectos de ley; de ellos son aprobados, término medio, tres mil y se rechazan, digamos, unos veintisiete mil. Hay, como promedio, cien personas interesadas en cada proyecto, lo que significa que quedan de dos a tres millones de ciudadanos más o menos disgustados, hecho que viene repi-

tiéndose desde que empezó a funcionar el Congreso, produciendo un descontento que es acumulativo.

Todo esto junto con el hecho de que las faltas de los miembros se publican en cuanto se presentan para la relección, es un ensayo general mucho más severo que un ensayo mental o de cualquier otra clase. En la política, así como en los negocios, la entrega de las cosas es el mejor ensayo. Si los errores de los abogados, las equivocaciones de los médicos y las faltas de los predicadores, fueran dados a la publicidad de vez en cuando, ¿qué resultaría de comparar estos caballeros con los miembros del Congreso.

HOMOGENEIDAD DEL CONGRESO

En la investigación antropológica, cuanto más homogénea es la materia en estudio, más fidedignos son los resultados. Como se verá en el cuadro 2, y en la columna 29 del cuadro 4 (cuadro básico) la mayoría (63) de los 89 miembros del Congreso estudiados, tienen ascendencia inglesa o escosesa predominante y los que tienen otra acusan una buena parte de sangre inglesa o escosesa.

Indudablemente los 89 miembros del Congreso que han sido objeto de mediciones, así como el Congreso en general, representan ciudadanos americanos que han triunfado en la flor de sus vidas, pues su edad media es de 53 años (ver columna 1, cuadro 4). Es de lamentar, sin embargo, que no haya sido estudiado un número mayor de ellos, aunque los 89 que lo fueron pueden considerarse como una muestra, tomada al azar del Congreso, puesto que pertenecen a casi todas las secciones del país, como puede verse en el cuadro 1. Si fueran medidos los 500 o más miembros del Congreso, ellos, a su vez, servirían como una muestra tomada al azar del pueblo americano en conjunto, como ya hemos sugerido.

MÉTODO DE ESTUDIO

Hace algunos años el autor efectuó un estudio estadístico de las actividades legislativas de los miembros del Senado del 62° Congreso (1). La presente investigación, empero, entra principalmente en el

(1) MAC DONALD ARTHUR, *A study of the United States Senate*, 8°, 24 páginas. Publicado en *Metron*, Padova, Italy, y también por la *Antropological Society of Bombay*, India, y por la *Revista Argentina de Ciencias Políticas*, Buenos Aires.

dominio de la antropología física. Se midieron con instrumentos de precisión 89 miembros (18 senadores y 71 representantes).

El primer objeto de tales mediciones es determinar la posición antropológica relativa de los estadistas americanos en la flor de sus vidas. En este esfuerzo inicial fué posible obtener los resultados del estudio de un número considerable de miembros (89). Si los miembros restantes fueran medidos, tendríamos, como ya he hecho notar, lo que podría servir para ser considerado como una representación de la posición antropológica relativa de los Estados Unidos.

Entre el estudio antropológico se hicieron algunas mediciones fisiológicas de sensibilidad a la presión sobre las sienes, con sensaciones : 1ª meramente desagradable; 2ª molesta; y 3ª casi dolorosa. Se tomaron veinte medidas de cada miembro, catorce físicas y seis psico-físicas. El tiempo empleado para ello varió, para cada miembro, de media hora a tres cuartos de hora, siendo necesario invertir más tiempo en algunos casos.

Es casi innecesario decir que todas las conclusiones o sugestiones deducidas de este estudio se refieren solamente a los 89 miembros del Congreso que fueron medidos, número que es demasiado pequeño para dar resultados de otro carácter que tentativo.

INSTRUMENTOS USADOS

En la mayoría de las mediciones se emplearon instrumentos antropológicos usuales. Hay, sin embargo, entre ellos dos nuevos instrumentos ideados por el autor, uno para medir la altura de la cabeza desde el oído para arriba, que podría llamarse « auriculometer », y otro para medir el grado de sensibilidad para el dolor llamado « temporal algómeter ».

El « auriculometer »

El « auriculometer » consiste en tres piezas de acero niquelado dispuestas como se ve en la fotografía. Cada una de estas piezas se desliza sobre la otra, y sobre cada una de éstas hay una escala dividida en centímetros y milímetros, de manera que puede medirse la longitud del deslizamiento de una pieza sobre otra. Sobre una pieza hay un nivel, a fin de que al aparato pueda ser mantenido en el « plante » auricular (plano del oído).



Auriculómetro

La proyección D de la barra A se inserta en el oído de tal manera que pueda llegar dentro de él sólo en una extensión de alrededor de un cuarto de pulgada para que no lastime; la pieza C se hace deslizar sobre la barra B y se ajusta en cualquier punto sobre la parte superior de la cabeza, y se lee, en la escala colocada sobre la barra B, la distancia entre este punto y el oído. Este instrumento permite medir *directamente* y con facilidad la altura de la cabeza desde el plano del oído hasta el vértice, bregma o más abajo. El nivel ayuda a mantener la barra A en el plano horizontal del oído.

MEDICIÓN DE LA PRESIÓN SOBRE LAS SIENES HASTA LA SENSACIÓN CASI DOLOROSA

A fin de medir la cantidad de presión que hay que aplicar sobre las sienes para producir sensaciones: 1ª meramente desagradable; 2ª molesta; y 3ª casi dolorosa; el autor ha ideado un « temporal algometer » que él ha usado algo pero que, prácticamente, es un instrumento nuevo.

El « Algometer temporal »

El « algometer » consiste en un cilindro de latón BF, con una varilla de acero C que corre a través de uno de los extremos del cilindro. Esta varilla está unida a un resorte y tiene un índice E que corre sobre la escala; esta escala está graduada de cero a 4000 gramos (141 onzas). El disco de latón, D, es de 15 milímetros (media pulgada) de diámetro. La longitud total del aparato es de 30 centímetros (12 pulgadas).

Para usar el « algometer » el operador se coloca detrás del sujeto y sosteniendo el aparato con la mano derecha presiona con el disco D sobre el músculo temporal derecho; luego el operador pasa al frente



Algómetro temporal

del sujeto de donde puede presionar con facilidad sobre el músculo temporal o sien izquierdos. Tan pronto como la presión de una sensación meramente desagradable se lee la cantidad de presión indicada por el índice E sobre la escala. La presión se ejerce gradual y lentamente, se dicen las mismas palabras en la misma forma a cada sujeto y por lo demás se hace que la parte psicológica sea lo más uniforme posible para todos los casos. Tan pronto como la presión es meramente desagradable se lee la presión, observando el índice E sobre la escala A. El sujeto a veces vacila en decir exactamente el punto en que la presión comienza a ser desagradable, pero este factor intelectual forma parte del experimento. En efecto, hay tres elementos inseparables en este experimento. Primero, la idea de desagradable; segundo, la sensación de desagradable; y tercero, el mismo músculo; es decir un elemento mental, otro sensitivo y otro físico, todos combinados y que no existen separados. La parte intelectual depende, posiblemente, en modo principal de la idea general de desagradable formada por los sucesos desagradables sufridos en la vida; la sensación de desagradable puede ser influenciada por dolores desagradables y lesiones físicas experimentadas en el pasado. El experimento también es afectado por la contextura del mismo músculo, su grosor y el de la piel que lo recubre.

Se anota la presión que produce una sensación meramente desagradable sobre cada sien. Se vuelve a hacer el experimento para determinar la menor cantidad de presión necesaria para producir una sensación de molestia. También aquí, como en el primer experimento, los factores intelectual, sensitivo y físico están combinados en su influencia sobre la anotación resultante. Para la sensación casi dolorosa se sigue el mismo procedimiento que para determinar las presiones desagradable y molesta.

INTERPRETACIÓN DE LOS EXPERIMENTOS DE PRESIÓN

Cuando un sujeto siente, por ejemplo, como apenas desagradable una presión de 1500 gramos (53 onzas) y como molesta una presión de 2000 gramos (70 onzas), la diferencia entre estas presiones, 500 gramos (17 onzas), mide la diferencia entre las sensaciones de presión desagradable y molesta. Cuando el mismo sujeto requiere 3000 gramos (106 onzas) de presión para experimentar una sensación casi dolorosa, la diferencia entre sus 2000 gramos (70 onzas) de su sensación

molesta y estos 3000 gramos (106 onzas) de su sensación casi dolorosa, es decir 1000 gramos (35 onzas), mide la diferencia entre estas sensaciones. Desde que el músculo, o factor físico del experimento, es prácticamente constante, los factores mental y sensitivo, en los dos experimentos para las sensaciones de molestia y casi dolorosa, tienen una influencia crecientemente mayor, es decir que este experimento psico-físico se va convirtiendo en más puramente físico, y así, hasta cierto punto, la diferencia entre las ideas de desagradable y la de molestia, o la casi dolorosa, puede ser medida en gramos u onzas.

En general la presión requerida para producir sensasiones desagradable, molesta o casi dolorosa varía con la resistencia del sujeto, es decir que cuanto más sensitivo sea éste tanto menor será la presión requerida.

SIGNIFICACIÓN DEL PESO DEL CEREBRO

En el reino animal, por lo menos en las tres cuartas partes de los casos, y probablemente en más, las especies que tienen cerebros más pesados acusan mayor inteligencia, y esto resalta más cuando llegamos al hombre, y lo comparamos con los animales que están por debajo de él en la escala zoológica. Porque, así como la inteligencia del hombre es mucho mayor que la de los animales, así también su cerebro es correspondientemente más pesado. En los animales cercanos al hombre, como el gorila, el peso del cerebro es de 400 (14 onzas) a 500 gramos (17 onzas), mientras en el hombre es de 900 (31 onzas) a 1800 gramos (47 onzas) y aún más, lo que es por cierto un prodigioso aumento, o más bien salto, siendo el término medio para el hombre de 1350 a 1450 gramos (47 a 51 onzas). Estos pesos comparativos de cerebro, especialmente en el hombre, refiérense a grupos y no a individuos; y aquí permítaseme, de una vez por todas, prevenir al lector contra un error muy común; ello es que el hecho de que el congresal A tenga un cerebro más pesado que el congresal B no significa ni remotamente que el congresal A sea el más inteligente de los dos, sino que parece ser que un centenar de congresales A cuyos cerebros pesan, término medio, más que el término medio de los cerebros de un centenar de congresales B, son los más inteligentes, por lo menos en los tres cuartos, y probablemente en más, de los ejemplos grupales. En suma, es tendencia general en el reino animal que el peso del cerebro y la inteligencia crezcan juntos; hay excepciones grupales, pero comparativamente son lo suficientemente pocas como para probar

la regla. Pero cuando llegamos al hombre, los individuos varían en tal forma que no se puede llegar a conclusiones respecto a ésta o aquella persona. Pero aun después de todo lo dicho, un cerebro pesado, especialmente en relación al desarrollo y al peso del cuerpo, es un signo favorable. El elefante tiene un peso cerebral más de dos veces superior al del hombre, pero la relación al peso de su cuerpo es de 1 a 500, mientras el peso del cerebro del hombre es al de su cuerpo como 1 a 50. Han sido pesados y estudiados los cerebros de unas 100 personas de la clase acomodada y, en la gran mayoría de los casos, los pesos estaban marcadamente sobre el término medio, y aquí otra vez, las excepciones sólo ayudan a confirmar la regla, o tendencia general. Muchas de las excepciones que se citan de cerebros grandes y escaso entendimiento son patológicas, y se excluyen naturalmente de la consideración, como los casos, por ejemplo, de idiotas o imbéciles, algunos de los cuales tienen cerebros grandes.

En el estudio sobre mil escolares de Wáshington, hecho hace unos treinta años, el autor encontró, que para cada edad, el término medio de las circunferencias de la cabeza de los niños inteligentes era notoriamente más grande que el de las circunferencias de los niños torpes de la misma edad; y como las cantidades eran grandes, es poco probable que los resultados hayan sido accidentales.

MÉTODO PARA ESTIMAR EL PESO DEL CEREBRO

Para estimar el peso del cerebro de los 89 miembros del Congreso, deduciéndolo de las medidas exteriores de la cabeza, se usa la siguiente ecuación, llamada « fórmula de Lee-Pearson », con la que se obtiene la capacidad craneana :

(Longitud de la cabeza — 11) $\times$ (ancho de cabeza — 11) $\times$ (altura de la cabeza — 11) $\times$ .000337) + 406.01 = capacidad craneana, en centímetros cúbicos.

A fin de obtener el peso del cerebro deduciéndolo de la capacidad craneana usamos la fórmula de Welcker, la que establece que cuando la capacidad craneana está comprendida

Entre 1200 y 1300 cm³	(72 y 78 pulg. cúb.)	se multiplica por	.91
Entre 1300 y 1400 »	(79 y 85 »)	»	.92
Entre 1400 y 1500 »	(85 y 91 »)	»	.93
Entre 1500 y 1600 »	(91 y 97 »)	»	.94
Entre 1600 y 1700 »	(97 y 103 »)	»	.95

obteniéndose como producto, en cada caso, el peso del cerebro en gramos.

Para ilustrar, deduzcamos el peso del cerebro del congresal A, por ejemplo. La longitud de su cabeza es de 201 milímetros (8 pulgadas), la anchura de su cabeza, 152 milímetros (6 pulgadas), y la altura de su cabeza, 146 milímetros (5 pulgadas). Aplicando la fórmula de Lee-Pearson, que hemos dado, tenemos : (201 — 11) × (152 — 11) × (146 — 11) × 0000337 + 406.01 = 1625 centímetros cúbicos (98 pulgadas cúbicas), que es la capacidad craneana del congresal. Buscando en la tabla de Welcker, que va más arriba, encontramos que para esta capacidad craneana corresponde multiplicar por .95, con lo que obtenemos 1534 gramos (54 onzas) como peso estimado de cerebro del cerebro del congresal.

RESULTADOS DE LAS MEDICIONES DE ESPESOR DEL CUERO CABELLUDO EN 117 AUTOPSIAS

Estos resultados están basados sobre mediciones del espesor del cuero cabelludo hechas sobre 117 varones blancos, durante sus autopsias.

El espesor medio del cuero cabelludo se da en la lista 1 :

Longitud de la cabeza menos longitud del cráneo..	4.9 mm	(0.192 pulg.)
Anchura de la cabeza menos anchura del cráneo..	6.2 »	(0.243 »)
Altura de la cabeza menos altura del cráneo......	5.3 »	(0.202 »)

Según la fórmula de Lee-Pearson hay que substraer 11 milímetros (0.433 pulgadas) de cada una de las tres medidas de la cabeza.

Esto es correcto teóricamente, pero prácticamente se evidencia que es un error. Parece que se supone que siendo el espesor del cuero cabelludo el mismo en los dos lados de la cabeza puede ser duplicado. Pero tomando las medidas en las autopsias de los sujetos (1), primero en la cabeza y luego en el cráneo, después de quitarle el cuero cabelludo, se obtienen resultados completamente diferentes, mucho menores que los 11 milímetros (0.433 pulgadas) restados en la fórmula de Lee-Pearson. Para hallar la causa de esta discrepancia el autor midió el espesor del cuero cabelludo (directamente), en siete casos de autop-

(1) Las autopsias fueron llevadas a cabo por el doctor Walter Freeman. El autor empezó estas mediciones pero ellas fueron continuadas por el doctor Freeman, juntas con otras de carácter biométrico.

sias, en los diversos lugares en que se toman la longitud, anchura y altura máximas sobre los vivos, obteniendo los siguientes resultados :

Lista 2. Varones blancos (en milímetros)

Nº 1......	3.25 (0.127 pulg.)	3.50 (0.146 pulg.)	2.50 (0.098 pulg.)
Nº 2......	2.50 (0.098 »)	3.20 (0.125 »)	2.50 (0.098 »)
Nº 3......	1.75 (0.066 »)	1.50 (0.058 »)	1.50 (0.058 »)
Nº 4......	3.00 (0.118 »)	3.00 (0.118 »)	2.00 (0.079 »)
Nº 5......	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)
Nº 6......	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)
Nº 7......	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)	2.00 (0.079 »)
	2.45 (0.095 pulg.)	2.06 (0.081 pulg.)	2.35 (0.091 pulg.)

El autor hizo estas mediciones del cuero cabelludo ejerciendo una ligera presión (con pinzas), presión que hizo lo más cercana posible a la que juzgó que se ejercería sobre el cuero cabelludo de un individuo vivo al hacer las mediciones de la cabeza. Es probable que la presión haya sido un poco mayor que la usual en las mediciones de la cabeza. Pero el cuadro sugiere el efecto de la presión ejercida en el cuero cabelludo por las puntas del compás calibrador.

Esta presión puede variar de acuerdo a medida, o de acuerdo a la rapidez o lentitud con que se hagan las mediciones.

FÓRMULA DE LEE-PEARSON MODIFICADA

Al usar la fórmula de Lee-Pearson modificada el autor restaría, para hallar la capacidad craneana, 5 milímetros (0.197 pulgadas) de la longitud de la cabeza, 6 milímetros (0.236 pulgadas) de la anchura y 5 milímetros (0.197 pulgadas) de su altura. Es decir, deduce estas cantidades a restar, de los resultados de 117 autopsias de Freeman (lista 1), omitiendo empero el uso de fracciones de milímetro, haciendo 4.9 milímetros (0.197 pulgadas) igual a 5 milímetros (0.197 pulgadas); 6.2 milímetros (0.243 pulgadas) igual a 6 milímetros (0.236 pulgadas) y 5.3 milímetros (0.208 pulgadas) igual a 5 milímetros (0.197 pulgadas). Los sujetos de las 117 autopsias venían de todas las secciones de los Estados Unidos, como los miembros del Congreso, su edad media era de 53 años, mientras que la de los miembros del Congreso es de 56 años, y la mayoría de esos sujetos eran nacidos en América. Así, pues, en esos sentidos pueden ser comparados a los miembros del Congreso.

POBLACIÓN DE LOS HOSPITALES

La mayoría de las mediciones de peso de cerebro fueron hechas sobre la población hospitalaria, que está muy lejos de representar la población general del país, pues los hospitalizados son principalmente personas con enfermedades agudas, o que sufren enfermedades quirúrgicas, o heridas, o que están en condiciones de salud que requieren tratamientos especiales. Todavía hay que enumerar las afecciones crónicas de los ancianos, como la bronquitis, las enfermedades valvulares del corazón, etc. Más aún, muchos son casos de indigentes, cuyos medios ambientes de vida han sido malos. De lo que se sabe del peso del cerebro de personas de la clase acomodada, se comprueba que los tienen más pesados que el término medio y probablemente aún más pesados que los de los que componen la población hospitalaria general, que representan principalmente la clase media inferior. Por estas razones, es probable que los pesos de cerebros, estimados con la fórmula de Lee-Pearson sean más bajos que los pesos reales.

MÉTODO PARA ENSAYAR LAS FÓRMULAS

La fórmula de Lee-Pearson modificada es: (longitud de la cabeza — 5) $\times$ (anchura de la cabeza — 6) $\times$ (altura de la cabeza — 5) $\times$ 0.000337) $+$ 406.01 $=$ capacidad craneana en centímetros cúbicos.

Aplicándola, por ejemplo, a las medidas de los dieciocho senadores, el peso medio de los cerebros de éstos es de 1620 gramos, lo que es superior en 133 gramos al peso medio de cerebro hallado con la fórmula original de Lee-Pearson, que fué la usada en este estudio *inicial.*

Al ensayar las fórmulas en la mesa de autopsias, lo más pronto que sea posible después de la muerte, y antes de que se establezca la rigidez inerte, el autor mide los sujetos exactamente como si estuviesen vivos; luego le saca el cerebro, halla el peso real de éste y compara el resultado con el peso estimado aplicando por medio de la fórmula las medidas exteriores de la cabeza.

ESTRUCTURA DEL CUERPO

La estructura o constitución del cuerpo se obtiene dividiendo la circunferencia del pecho (a la altura de las axilas) por la estatura. A

medida que la constitución del cuerpo crece, uno pasa de la delgadez a la corpulencia; es decir, la periferia del pecho se hace mayor con relación a la altura, esto es, la constitución se hace más ancha en relación a la estatura. Cuando la circunferencia del pecho es grande comparada con la altura, a menudo llamamos al hombre « grueso » *(thickset)*. Estos términos no siempre tienen exactamente el mismo significado, pero « delgadez » y corpulencia, o grosura *(thicksetness)* parecen los más apropiados. Corpulencia no significa necesariamente vigor.

Davenport (1) dice que la constitución, según se concibe popularmente, « es una relación entre los diámetros transversal y vertical ». Como la circunferencia del pecho tiene una relación casi constante con el diámetro del pecho, su razón a la estatura sirve probablemente como el mejor índice de la estructura del cuerpo. Esto es preferible a la determinación del peso, que es completamente variable, si se compara con la circunferencia del pecho.

RELACIÓN ENTRE LAS CONSTITUCIONES CORPORALES Y LOS PESOS ESTIMADOS DEL CEREBRO DE LOS MIEMBROS DEL CONGRESO

Una cosa es saber que hay una relación entre dos cantidades, pero es otra de mucha mayor importancia conocer la extensión o grado de esta relación. Así podemos tener dos cantidades x e y, que podemos llamar variables, como, por ejemplo, el peso del cerebro (x) y la estructura corporal (y) de los miembros del Congreso.

Para medir la extensión o grado de relación de estas cantidades, hacemos uso de una ecuación llamada « coeficiente de correlación de Pearson » que se expresa por la letra r y que se escribe :

$$r = \frac{\Sigma xy}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

En esta ecuación :

Σ = la suma de lo que sigue inmediatamente;

x = la desviación de los valores de x del valor medio de x;

y = la desviación de los valores de y del valor medio de y;

n = el número de casos;

(1) DAVENPORT CHARLES B., *Body-build and its Inheritance*, publicado por el Instituto Carnegie, de Wáshington, diciembre de 1923.

σ_x = la desviación normal de x;

σ_y = la desviación normal de y.

La desviación normal es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de todas las desviaciones de la variable respecto a su valor medio y su ecuación es:

$$\sigma \text{ (desviación normal)} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}.$$

En esta ecuación d es la desviación respecto a la media de la serie, y Σd^2 es la suma de los cuadrados de todas las desviaciones.

Aplicaremos ahora estas ecuaciones a la determinación de la extensión o grado de relación entre los pesos estimados de cerebro y la estructura corporal de los 89 miembros del Congreso, que fueron medidos.

Primero hallaremos la desviación normal (σ) de las dos variables x (peso del cerebro) e y (estructura corporal).

$$\sigma_x \text{ (desviación normal de } x) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}},$$

donde Σd^2 = la suma de los cuadrados de todas las desviaciones de la variable x (peso del cerebro) y n = al número que reúne la serie (los 89 miembros del Congreso).

Σd^2 desarrollado = 1.175.670. Substituyendo estos valores en la ecuación, tenemos:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{1.175.670}{89}} = 115,$$

que es la desviación normal de los pesos estimados de los cerebros de los 89 miembros del Congreso estudiados.

En forma similar podemos hallar la desviación normal de la constitución corporal (σ_y) de los congresales, así:

$$\sigma_y \text{ (desviación normal de } y) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}},$$

donde Σd^2 = 23.618.197 y n = 89 (número de congresales). Substituyendo estos valores en la ecuación, tenemos:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{23.618.197}{89}} = 515,$$

que es la desviación normal para la estructura corporal de los 89 miembros estudiados.

Volvamos ahora al coeficiente de correlación de Pearson :

$$r = \frac{\Sigma xy}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

En esta ecuación Σxy = la suma de los productos de todas las desviaciones respecto a sus valores medios respectivos de todas las x (pesos de cerebro) y todas las y (estructuras del cuerpo) para los 89 (n) miembros del Congreso, que es igual a 3.354.221 y se halla de la siguiente manera :

Tomemos el congresal A otra vez : Su altura es de 180 centímetros (70 pulgadas), su periferia de pecho es de 90 centímetros (35 pulgadas); dividiendo su periferia de pecho (90) por su altura (180) nos da 5000, no teniendo en cuenta el punto decimal; esta relación constituye su estructura corporal. La razón media para la estructura corporal de todos los miembros es 5709, de la que restando la estructura corporal de este congresal nos queda 709, que es su desviación del término medio. Su peso estimado de cerebro es 1543 gramos (54 onzas); el peso medio estimado de cerebro de todos los miembros es 1450 gramos (50 onzas); substrayendo éste de los 1543 gramos (54 onzas), peso del cerebro del congresal, obtenemos 93 gramos (31 onzas) para su desviación del término medio de los congresales (sin tener en cuenta el signo más o menos). Ahora su desviación para la razón de su estructura corporal (709) está representada por y en la ecuación $r = \frac{\Sigma xy}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$, y su desviación para el peso de cerebro (93) está representada por x, de manera que xy = 93 multiplicado por 709, lo que es igual a 65.937, tratando los otros 88 miembros en forma similar, sumamos todos los resultados; esta suma, que está representada por Σxy en la ecuación, es igual a 3.354.221.

En cuanto a las desviaciones normales σ_x y σ_y ya las hemos desarrollado : $\sigma_x = 115$ y $\sigma_y = 515$. Substituyendo estos valores en la ecuación del coeficiente de correlación de Pearson, tenemos :

$$r = \frac{\Sigma xy}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{3.354.221}{89.115.515} = \frac{3.354.221}{5.271.025} = .63,$$

que es el coeficiente de correlación, y acusa un alto grado de relación entre el peso del cerebro y la estructura corporal de los 89 miembros

del Congreso, medidos. Si la relación fuera perfecta, el coeficiente de correlación sería la unidad o 100.

El error probable (P. E.) de este coeficiente de correlación (0.63) es 0,043, y se deduce de la ecuación :

$$\text{P. E.} = .6744898 \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$$

en la que r es el coeficiente de correlación y n el número de casos. Substituyendo los valores de r y n, tenemos :

$$\text{P. E.} = 0.6744898 \frac{1 - .3969}{9{,}4339811} = 0{,}043.$$

Este error probable se une al coeficiente de correlación, escribiéndolo de esta manera :

$$0.63 \pm 0.043.$$

Es importante conocer el error probable, porque ello da la seguridad respecto a la magnitud relativa de las fluctuaciones previstas debidas a la mera casualidad. Los errores probables del término medio (media) y de la desviación normal (σ) se deducen en forma similar, por medio de ecuaciones que pueden hallarse en cualquier trabajo que trate de métodos estadísticos.

En el cuadro I (pág. 29), los 89 miembros del Congreso, que fueron medidos personalmente por mí, están clasificados, de acuerdo a las divisiones geográficas usuales, por grupos estaduales y se dan las medias de las medidas de sus cabezas, de la estructura de sus cuerpos y de la fuerza de compresión de sus manos. También figuran los pesos medios estimados de cerebro para cada grupo estadual o división geográfica.

Los Estados Orientales del centro-sud, es decir, Kentucky, Tennesse, Alabama y Mississippi, acusan la estatura más elevada, 179 centímetros (70 pulgadas) y al mismo tiempo el peso más grande de cerebro (1571 gramos = 55 onzas); también la longitud mayor de cabeza (199 milímetros = 8 pulgadas). El peso de cerebro más próximo es el que acusan los miembros de los Estados Orientales del centro-norte, es decir, Ohio, Indiana, Illinois, Michigan y Wisconsin: éstos tienen también estatura elevada (177 centímetros o sea 69 pulgadas). Este hecho tiende a confirmar otros estudios, hechos sobre mayor cantidad de sujetos, de los que se dedujo una positiva correlación entre la estatura y el peso del cerebro y una más positiva todavía entre la longitud de la cabeza y el peso del cerebro. También al

peso más bajo de cerebro (1419 gramos o 19 onzas) corresponde la menor longitud de la cabeza (191 milímetros o sea 7 pulgadas), como se indica en las medidas de los cinco miembros de los Estados del Pacífico, es decir, California, Wáshington y Oregon.

Los trece miembros de los Estados Orientales del centro-sud (Kentucky, Tennesse, Alabama, Mississippi), a pesar de tener el peso medio más alto de cerebro, acusan los números más bajos para la fuerza de compresión de las manos (34, 30 kilogramos = 91, 80 libras). Por otra parte, los cinco miembros de los Estados de la costa del Pacífico tienen la fuerza más elevada de compresión de las manos (76 kilogramos = 203 libras) pero el peso más bajo de cerebro.

Se verá, en la sección D del cuadro III, que el coeficiente de correlación de Pearson para el peso de cerebro y la estatura de los 89 miembros del Congreso medidos es 0.55 ± 0.053, que es bien alto si se compara con la correlación entre los pesos de cerebro y estaturas de los ingleses, que, según Blakeman (1) es 0.2885 ± 0.0572.

RELACIÓN DE LA PRESIÓN DESAGRADABLE A LA FUERZA DE COMPRESIÓN DE LA MANO

Al ordenar las presiones desagradable, se sumaron las cantidades correspondientes a las dos sienes y se dividió por dos el resultado, haciendo una sola cantidad para cada miembro. Las fuerzas de compresión para cada mano se combinaron para obtener una fuerza total de compresión para cada uno. Todas estas cantidades están en las columnas 18, 19 y 20 del cuadro IV. El desarrollo del coeficiente de correlación de Pearson ha sido ilustrado ya al hallarlo para el peso del cerebro y la estructura del cuerpo. Aplicando los mismos métodos, para determinar el grado de relación entre la presión desagradable sobre las sienes y la fuerza de compresión de las manos, se halla que el coeficiente de correlación, para los miembros del Congreso en general (véase cuadro III, sección A), es 0.73 ± 0.0347, que es bien alto. La causa de esta relación cercana entre la presión desagradable y la fuerza de la mano puede ser debiba al hecho de que las personas físicamente fuertes tienden a ser menos sensitivas. Como los congresales son de cuerpos grandes tienden a ser fuertes, y como hemos

(1) Blakeman, J., Lee A. y Pearson Karl. *A study of the Biometric Constants of English Brain-Weights, and their Relationships to Physical External Measurements. Biometrika,* London, volumen IV, página 135.

visto la correlación entre la estructura corporal y la presión desagradable es alta, siendo 0.63 ± 0.043 (ver cuadro III, sección B). Esto confirma todavía más la idea de que cuanto mayor es la fuerza de la mano de los miembros del Congreso, más resistentes son ellos a la presión desagradable, lo que sugiere que tienen menos sensibilidad para los sucesos desagradables, cualidad que puede serles útil en las vicisitudes de la vida política.

En el cuadro II compararemos primero en forma general los miembros del Congreso respecto a su sensibilidad para las presiones apenas desagradable, molesta y casi dolorosa, y éstas en relación a sus ascendencias predominantes. Se notará que, casi sin excepción, los miembros requieren la menor presión para lo que se considera desagradable (1662 gramos = 58 onzas) (columna 9) y la mayor presión para lo casi doloroso (2261 gramos = 79 onzas) (columna 11). Se verá, además, que la sien izquierda es más sensible que la derecha.

En estudios previos (1) de niños y adultos, el autor halló el mismo hecho. Puede ser que la mayor sensibilidad de la sien izquierda se deba a que la mayoría de las personas son diestras, por lo que tienen más actividad física, y consecuentemente mayor afluencia de sangre sobre el lado derecho, con la consiguiente mejor alimentación de los nervios de ese lado, que por esto puede que sean más resistentes al dolor y al deterioro. Así se ha dicho que la dentadura se deteriora más del lado izquierdo de la cara que en el derecho.

Parece también que los que tienen mayor peso estimado de cerebro tienden a resistir mejor la presión, demostrando más dureza. En el cuadro III, sección B, esto se indica por el hecho de que la correlación de la estructura del cuerpo con el peso del cerebro es 0.63 ± 0.043 y la correlación de la estructura del cuerpo con la presión desagradable es 0.64 ± 0.0422, correlaciones prácticamente iguales y evidentemente altas. Por otra parte, conjuntamente, se registra que los que tienen cerebros menos pesados, como los de ascendencia francesa o galesa, acusan más sensibilidad, como se indica en la columna 12, cuadro II, en la que se han sumado todos los términos medios y se ha sacado un promedio de ellos.

Los miembros cuyas ascendencias predominantes son las holandesa, escosesa, inglesa e irlandesa, acusan, en el orden mencionado, las sensibilidades menores.

(1) *Man and abnormal man,* Document 187, 58th Congress, 3rd Session, páginas 178-179.

En la distinción entre la sensación de presión desagradable y molesta, los descendientes de holandeses acusan una diferencia de 812 gramos (28 onzas), los de irlandeses 565 (20 onzas) y los de galeses 275 gramos (9 onzas), lo que es prácticamente una medida cuantitativa de la diferencia entre las presiones desagradable y molesta, según ellos las experimentan. Para distinguir la presión molesta de la casi dolorosa, los que tienen ascendencia francesa requieren una presión de 513 gramos (18 onzas), los que descienden de holandeses una de 488 gramos (16 onzas) y los que son descendientes de ingleses 487 gramos (17 onzas). Los miembros que tienen otras ascendencias requieren una presión mucho menor.

APLICACIÓN DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN A LA ASCENDENCIA PREDOMINANTE

En la columna 29 del cuadro IV (págs. 32 a 37) se dan las ascendencias predominante y de otra clase de cada miembro del Congreso medido. En el cuadro II (pág. 30) se hallará la cantidad de miembros del Congreso según su ascendencia predominante, siendo 32 los descendientes de ingleses, 30 los de escoseces, 8 los de alemanes, 6 los de noruegos, y así los demás. Como ya se ha dicho, la gran mayoría está constituída por los que tienen ascendencia inglesa o escosesa.

Al determinar el grado de relación de la presión desagradable y la fuerza de la mano, en conexión con la ascendencia predominante, desarrollando los coeficientes de correlación, hallamos, en el cuadro III, sección A, que los miembros de ascendencia inglesa predominante tienen un coeficiente de correlación de 0.66 ± 0.0734, los que son de ascendencia escosesa una correlación de 0.60 ± 0.074 y los que tienen otras ascendencias combinadas (24 miembros) tienen un coeficiente de correlación de 0.74 ± 0.0619. Todos estos coeficientes indican altos grados de correlación entre la presión desagradable y la fuerza de la mano, de acuerdo a la ascendencia predominante. La presión media desagradable para los miembros de ascendencia escosesa es de 1771 gramos (62 onzas), la de los que descienden de ingleses es de 1532 gramos (53 onzas) y la de los que tienen otra ascendencia es de 1493 gramos (52 onzas). Esto indica que los que tienen ascendencia escosesa predominante son menos sensibles para la presión desagradable que los de ascendencia inglesa, por 239 gramos (8 onzas), y que éstos son menos sensibles para la misma presión que los que tienen otra

ascendencia predominante, por 39 gramos (1 1/3 onza); es decir, que los que descienden de escoseses son los más resistentes de todos, para la presión desagradable, y ello puede sugerir que tienen mayor entereza para resistir los sucesos desagradables de la vida.

RELACIÓN DE LA PRESIÓN CASI DOLOROSA A LA INSTRUCCIÓN RECIBIDA

Hemos dividido los miembros del Congreso, que hemos estudiado, èn dos clases, de acuerdo al grado de instrucción que hayan recibido en su juventud; una clase está compuesta por los que tienen instrucción universitaria y la otra por los que tienen una instrucción que nó ha llegado a ser universitaria, como la adquirida en colegios, academias o escuelas comunes. Por instrucción universitaria entendemos la de aquellos que se han graduado en algún colegio, o han estudiado en él uno o más años, y que luego han seguido el estudio de sus profesiones en alguna universidad.

Examinando el cuadro III, sección E, se hallará que los miembros con instrucción universitaria acusan una presión media casi dolorosa de 2082 gramos (73 onzas) y los que tienen menos instrucción una presión casi dolorosa de 2377 gramos (83 onzas). De modo que, los miembros del Congreso estudiados, que tienen instrucción universitaria son más sensibles para la presión casi dolorosa que los con menos educación, por 295 gramos (10 1/2 onzas). Esto sugiere la idea de que cuanto mayor es el grado de instrucción alcanzado, tanto mayor es la sensibilidad para la presión casi dolorosa.

RELACIÓN DE LA PRESIÓN CASI DOLOROSA CON EL LUGAR DE NACIMIENTO

Hemos dividido también los miembros en dos clases, los nacidos en el campo y los nacidos en las ciudades, y luego hemos hallado la presión casi dolorosa media para cada clase. Como se notará en el cuadro III (pág. 31), sección E, la media para los nacidos en el campo es de 2273 gramos (80 onzas) y la que corresponde a los nacidos en las ciudades es de 2048 gramos (72 onzas); es decir, que los nacidos en el campo son menos sensibles para la presión casi dolorosa por 226 gramos (8 onzas), que los nacidos en las ciudades, lo que también sugiere que la vida del campo tiende a desarrollar la entereza para resistir mejor lo que es físicamente doloroso.

Como los que viven en el campo generalmente reciben menos instrucción que los que habitan las ciudades, y como se acaba de demostrar que los que tienen instrucción universitaria son más sensibles a la presión casi dolorosa que los que tienen menos instrucción, se refuerza la sugestión de que la vida del campo tiende a desarrollar la entereza para resistir los dolores físicos.

RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA DEL CUERPO Y LA PRESIÓN DESAGRADABLE SOBRE LAS SIENES

En el cuadro III, sección B, se dan las medias, las desviaciones normales y los coeficientes de correlación con sus respectivos errores probables, para la relación entre la estructura del cuerpo y la presión desagradable sobre las sienes para el conjunto de los 89 miembros y tambien para el grupo de ellos que tienen como predominante la ascendencia inglesa.

Prácticamente no hay diferencia entre las medias de las estructuras del cuerpo de los miembros en general y las de los que tienen ascendencia inglesa predominante, siendo una 5709 y la otra 5715. El coeficiente de correlación para la estructura del cuerpo y la presión desagradable sobre las sienes es de 0.64 ± 0.0422 para el conjunto de todos los miembros y de 0.62 ± 0.07096 para los que tienen ascendencia inglesa predominante. En esto también la diferencia es insignificante. Los coeficientes de correlación son evidentemente altos.

CONCLUSIONES GENERALES

La mayoría de estas conclusiones son de carácter tentativo, por el número limitado de casos, pero muchos de los resultados no parecen accidentales, sino que parecen indicar la probabilidad de que serían correctos aun si se aplicaran a un mayor número de personas. En suma, estas conclusiones pueden sugerir la dirección o tendencia que se deberá seguir probablemente para llegar a la verdad.

1ª Los métodos científicos de estudio son los mismos para toda clase de personas, sean normales o anormales;

2ª A los fines de la investigación los miembros del Congreso pueden servir como una muestra tomada al azar de los Estados Unidos, de la misma manera que

3ª los 89 miembros medidos pueden usarse como una muestra tomada al azar del Congreso;

4ª Sin embargo, el número (89) es insuficiente para dar a los resultados la certeza necesaria;

5ª El estudio del Congreso puede hacer que otros países se decidan a efectuar investigaciones similares, con lo que nos será posible llegar a tener eventualmente una antropología legislativa comparativa, en la que los Estados Unidos pueden ocupar el primer lugar;

6ª El examen de los miembros por especialistas de corazón, de pulmón, de aparato digestivo, de naríz, garganta y ojos, con los exámenes del sistema nervioso y de la sangre, hará posible el descubrimiento de tendencias enfermas incipientes, de manera que se podrán evitar los resultados ulteriores, y de este modo el Congreso daría un ejemplo para que el pueblo en general entrara en el campo de la medicina preventiva. Un fuego incipiente, si se descubre a tiempo, puede ser extinguido fácilmente;

7ª Los datos obtenidos en estos exámenes especiales pueden ser correlacionados con las mediciones antropológicas, y complementarse y ayudar al desarrollo de la ciencia en general;

8ª Este estudio no es un ensayo mental del Congreso. Los miembros de éste ya han sido probados por el pueblo;

9ª La publicidad de los defectos de los miembros, así como el rechazo de miles de proyectos de leyes, se han acumulado en sus efectos, causando mucho disgusto, pero muy poco justificado;

10ª La homogeneidad del Congreso hace que los resultados sean más dignos de crédito que si no existiera tal homogeneidad;

11ª El «auriculometer» es un instrumento nuevo y mide la altura de la cabeza fácil y directamente;

12ª El «temporal algometer» mide la cantidad de presión que es necesario aplicar sobre las sienes para producir sensaciones hasta casi dolorosa;

13ª También el mismo instrumento puede expresar en gramos, u onzas, la diferencia entre las ideas de desagradable, molesto y casi doloroso;

14ª En general, en el reino animal, incluyendo el hombre, la inteligencia crece con el peso del cerebro;

15ª Pero en el hombre, este principio se aplica más bien a grupos de individuos que a los mismos individuos;

16ª En un estudio practicado sobre 20.000 escolares de Wáshington por el autor, la circunferencia media de la cabeza de cada grupo de edad, sin excepción, fué mayor sensiblemente en los niños más despiertos;

17ª El peso del cerebro de los vivos puede estimarse por medio de una ecuación en la que se aplican las medidas exteriores de la cabeza;

18ª La estructura del cuerpo es el resultado de dividir la circunferencia del pecho por la estatura, y probablemente es lo que indica mejor la corpulencia o grosura de la constitución;

19ª La estructura del cuerpo de los 89 miembros del Congreso estudiados, mantiene una relación cercana con los pesos estimados de sus cerebros, como lo demuestra el coeficiente de correlación de Pearson, que resulta ser de 0.63 ± 0.043;

20ª Los miembros del Congreso pertenecientes a los estados orientales del centro sur (Kentucky, Tennessee, Alabama y Mississippi) acusan la mayor estatura media y el peso estimado de cerebro más alto;

21ª La correlación entre el peso estimado del cerebro y la estatura de los 89 miembros es 0.55 ± 0.053, que es mucho mayor que lo usual;

22ª La correlación entre la presión desagradable sobre las sienes y la fuerza de presión con las manos es 0.73 ± 0.347, que es sensiblemente grande, y sugiere que en general cuanto mayor es la fuerza, menor es la sensibilidad de las personas;

23ª La sien izquierda es menos sensible a las presiones que causan dolor que la sien derecha;

24ª Los miembros del Congreso, cuyas ascendencias predominantes son la holandesa, la escocesa, la inglesa, o la irlandesa, demuestran, en el orden mencionado, que tienen menos sensibilidad a los grados de presión, que aplicados sobre las sienes, llegan hasta ser dolorosos;

25ª Los miembros que tienen ascendencia predominante escocesa son los que resisten mejor que todos los otros, la presión desagradable sobre las sienes, lo que sugiere que tienen mayor entereza para la vida;

26ª La diferencia entre la presión desagradable y la molesta sobre las sienes es de 812 gramos (28 onzas) para los que tienen ascendencia holandesa predominante, 565 gramos (20 onzas) para los que la tienen irlandesa, y 275 gramos (9 onzas) para los que descienden de galeses;

27ª Los miembros que tienen instrucción universitaria son más sensibles para la presión con sensación casi dolorosa, que los que han recibido menos educación;

28ª De la misma manera los miembros que han nacido en las ciudades son más sensibles para la presión casi dolorosa, que los nacidos en el campo;

29ª Esto sugiere que las tendencias de la civilización moderna para la vida de las ciudades y la mayor educación, tienden a disminuir el poder de resistencia a lo desagradable y doloroso.

CUADRO I

Miembros del Congreso por grupos estaduales

Número de miembros	Estados	Términos medios de la cabeza			Términos medios del cuerpo					Fuerza de compresión de la mano		Peso estimado del cerebro en gramos
		Longitud en milímetros	Anchura en milímetros	Altura en milímetros	Estatura en centímetros	Altura sentado en centímetros	Envergadura en centímetros	Circunferencia del pecho a la altura de la axilas	Peso en libras	Derecha en kilogramos	Izquierda en kilogramos	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	New England (Me., N. H., Vt., Mass., R. I., Conn.)..........	107	152	139	174	90	172	91	159	35	36	1444
8	Middle Atlantic (N. Y., N. J., PA.).	195	155	137	176	91	180	99	183	33	33	1439
20	East North Central (Ohio, Ind., Ill., Mich., Wis.)............	197	157	142	177	89	178	101	189	39	35	1525
16	West North Central (Minn., Ia., Mo., N. D., S. D., Neb., Kans.).	196	155	140	179	90	180	108	189	37	35	1472
8	South Atlantic (Del., Md., D. C., Va., N. C., S. C., Ga., Fla.)...	197	155	140	178	86	182	117	191	36	32	1476
13	East South Central (Ky., Tenn., Ala., Miss.)..................	198	161	143	179	91	178	100	147	34	30	1571
13	West South Central (Ark., La., Okla., Tex.)................	195	153	140	175	81	174	100	175	38	32	1449
3	Mountain (Idaho, Wyo., Colo, N. Mex., Ariz., Utah., NEV)......	196	154	137	170	88	182	118	178	35	31	1437
5	Pacific (Wash., Ore., Cal.)......	191	151	141	175	89	177	104	183	40	36	1419
89	Términos medios totales........	196	156	139	177	90	178	104	183	38	33	1450
	Térm. medios en medidas inglesas.	8 Pulgs.	6 Pulgs.	5 Pulgs.	69 Pulgs.	35 Pulgs.	70 Pulgs.	41 Pulgs.	183 Lbs.	83 Lbs.	72 Lbs.	50 Lbs.

CUADRO II

Ascendencia predominante, sensibilidad a la presión sobre las sienes y peso del cerebro

Ascendencia predominante	Sien derecha en gramos			Sien izquierda en gramos			Compresión de la mano Kg	Peso estimado del cerebro en gramos	Término medio para las dos series			Sumario de la sensibilidad total
	Des-agradable	Molesta	Casi dolorosa	Des-agradable	Molesta	Casi dolorosa			Des-agradable	Molesta	Casi dolorosa	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Inglesa (32)	1652	1718	2218	1649	1895	2360	67	1500	1650	1801	2289	1913
Escosesa (30)	1658	1866	2129	1782	1829	2448	73	1462	1720	1847	2283	1950
Alemana (8)	1565	1692	2042	1712	1871	2166	74	1484	1638	1781	2104	1841
Noruega (6)	1340	1183	—	1410	1266	—	79	1455	1375	1224	—	—
Irlandesa (5)......	1360	2020	2220	1490	1960	2320	67	1479	1425	1990	2270	1895
Francesa (3)......	1216	1300	1650	1333	1425	2100	81	1452	1274	1362	1875	1503
Galesa (3)........	1433	1600	1866	1233	1616	1916	59	1445	1333	1608	1891	1670
Holandesa (2).....	1825	2425	3250	2075	3100	3250	89	1656	1950	2762	3250	2656
Término medio total	1582	1784	2166	1662	1855	2356	70	1450	1622	1819	2261	1900
Término medio en onzas	55	63	76	58	65	83	154 lbs.	50	57	64	79	67

CUADRO III

Sumario de las medias aritméticas, desviaciones normales, coeficientes de correlación, errores probables, para las presiones desagradable y casi dolorosa, fuerza de la mano, estructura corporal y peso estimado del cerebro de los 89 miembros del Congreso, en conjunto, y también en conexión con la ascendencia predominante, educación relativa y lugar de nacimiento.

Ascendencia predominante	Media aritmética (m) en gramos	Probable error de la media (P. E.)	Desviación normal	Probable error de la desviación normal	Media aritmética (m) en gramos	Probable error de la media (P. E.)	Desviación normal	Probable error de la desviación normal	Coeficiente de correlación
Sección A									
	Presión desagradable				Fuerza de compresión de la mano				
89 Miembros en general............	1657	51.33	690	36.29	70	1.190	16	0.8416	0.78 ± 0.0347
35 — de ascendencia inglesa...	1532	61.78	542	43.68	66	1.482	13	1.0478	0.66 ± 0.0731
28 — — escosesa..	1771	83.58	658	59.28	73	2.159	17	1.531	0.60 ± 0.074
26 — de otra ascendencia	1493	52.06	380	36.94	71	2.492	16	1.556	0.74 ± 0.0619
Sección B : Relación de la estructura corporal a la presión desagradable									
	Estructura corporal				Presión desagradable				
89 Miembros en general............	5709	36.30	515	26.00	1596	36.67	513	25.90	0.64 ± 0.042
35 — de ascendencia inglesa...	5715	46.51	408	32.88	1607	68.28	599	48.27	0.62 ± 0.0709
Sección C : Relación de la estructura corporal al peso estimado del cerebro									
89 Miembros en general............	5709	36.82	515	26.20	1450	8.222	115	5.80	0.63 ± 0.043
Sección D : Relación del peso estimado del cerebro a la estatura									
	Peso del cerebro				Estatura				
89 Miembros en general............	1450	8.222	115	5.80	177	414	5.8	0.2939	0.55 ± .0530
Sección E : Presión casi dolorosa									
15 Miembros nacidos en las ciudades..	2048	91.52	526	64.69	»	»	»	»	»
25 — — en el campo.....	2274	65.43	574	46.26	»	»	»	»	»
29 — con instruc. universitaria.	2082	61.12	489	43.03	»	»	»	»	»
20 — con menos instrucción ...	2377	92.16	627	65.20	»	»	»	»	»

CUADRO IV. — *Medidas antropológicas, fisiológicas*

		Antropológicas														Fisiolo		
Número	Edad	Medidas de la cabeza en milímetros			Estimación de		Cuerpo en centímetros cúbicos					Cara en milímetros		Nariz en milímetros		Fuerza de compresión de la mano kilogramos		
		Longitud	Anchura	Altura	Capacidad craneana c. c.	Peso del cerebro gramos	Estatura cm.	Altura sentado cm.	Envergadura cm.	Circunferencia del pecho	Peso en libras	Longitud mm.	Anchura mm.	Longitud mm.	Anchura mm.	Derecha	Izquierda	Ambas manos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	29	198	160	145	1664	1581	178	92	179	107	210	97	140	32	20	49	39	88
2	31	184	146	138	1405	1306	175	90	174	88	134	102	130	47	32	50	41	91
3	35	186	156	137	1483	1379	185	89	193	85	215	97	136	36	21	49	41	90
4	35	194	152	140	1527	1435	182	89	182	89	157	111	126	36	14	»	»	»
5	36	201	152	146	1625	1543	180	95	178	90	167	105	122	42	13	»	»	»
6	37	194	150	141	1520	1428	172	88	164	86	140	93	124	31	12	28	30	58
7	38	200	160	142	1649	1566	176	89	182	108	220	96	142	34	15	49	46	95
8	39	191	164	140	1603	1523	171	89	166	93	»	95	142	33	16	25	23	48
9	39	192	152	149	1593	1499	176	90	184	89	154	92	130	30	12	43	34	77
10	41	188	156	144	1556	1462	191	97	195	120	228	95	144	33	17	50	45	95
11	41	196	156	135	1527	1435	177	85	183	95	163	100	132	26	14	35	31	66
12	42	196	151	145	1576	1481	173	93	171	93	158	99	126	37	19	35	30	65
13	43	200	160	150	1724	1655	170	91	177	111	210	92	126	30	22	38	38	76
14	44	190	150	145	1629	1437	177	84	170	102	181	93	140	29	19	34	29	63
15	44	191	148	138	1591	1495	174	82	176	90	150	100	124	37	14	47	38	85
16	45	202	157	148	1693	1608	183	»	198	104	200	112	152	33	17	»	»	»
17	45	202	156	132	1535	1443	177	90	181	97	180	95	130	34	13	44	48	92
18	45	194	154	140	1543	1450	178	92	177	106	195	91	124	33	15	»	»	»
19	45	200	142	140	1482	1378	171	93	176	100	170	100	134	52	14	39	38	77
20	46	196	156	151	1671	1587	182	95	183	99	195	99	122	31	16	40	38	78
21	46	200	151	145	1626	1545	188	91	185	99	165	110	122	46	32	48	43	91
22	46	188	156	140	1521	1430	164	87	165	100	179	98	140	40	14	35	32	67
23	46	198	150	141	1545	1452	178	90	180	92	170	102	124	32	16	45	31	76
24	47	190	152	134	1452	1350	172	89	172	105	190	97	142	27	19	39	36	75
25	47	194	150	137	1486	1382	168	81	164	92	150	115	130	37	15	30	30	60
26	48	194	158	140	1657	1574	177	88	178	116	235	107	148	37	20	55	44	99
27	48	196	162	143	1575	1480	182	95	182	108	202	111	140	32	17	41	30	71
28	49	198	152	141	1561	1467	183	95	187	93	168	97	134	37	17	48	42	90
29	49	186	156	136	1475	1371	177	89	180	93	168	95	132	29	13	30	26	56
30	49	192	156	140	1547	1454	186	95	190	101	200	96	132	33	16	50	55	105
31	50	212	164	151	1857	1801	193	»	211	122	258	118	148	36	23	58	52	110
32	50	206	162	130	1587	1452	179	84	188	111	»	103	146	36	22	55	50	105
33	51	202	156	147	1675	1591	179	98	190	100	190	101	132	34	17	30	28	58
34	50	202	160	138	1624	1543	177	88	184	106	167	93	132	32	16	44	38	82
35	50	201	150	134	1506	1416	181	95	185	107	170	98	126	31	14	36	31	70

y sociológicas de 89 miembros del Congreso

gicas						Sociológicas									
Presión con el « algometer » temporal						Instrucción						Época y lugar de nacimiento			
Derecha			Izquierda							Ascendencia	Ocupación				
Apenas desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Apenas desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Universidad	Colegio	Academia	Escuela común			Verano	Invierno	Ciudad	Campo
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
800	1050	1500	1100	1200	2150		X			Franc., holand., irland.	Abogado		X		X
1500	»	»	1650	»	»	X				Esc., hol., ingl., alem.	—	X			X
1800	1150	2000	2000	1600	2100	X				Alemana, francesa	—	X		X	
850	»	»	950	»	»	X				Noruega	Comerciante				X
1600	1500	»	1700	1250	»	X				Escocesa, irlandesa	Abogado		X		X
1300	2050	2950	1500	1950	3150		X			Irlandesa	Act., comerc.	X		X	
1950	2050	2400	2600	2600	2850				X	Alemana	Granjero		X	X	
1300	»	»	1100	»	»	X				Inglesa	Abogado	X		X	
1950	1700	2350	1575	2100	2650	X				Inglesa, galesa	—				X
1000	1200	950	1250	1250	750	X				Noruega	—		X		X
850	»	»	1000	»	»		X			Inglesa, alemana	Maestro	X			X
1250	1700	2100	1150	1750	2500	X				Irlandesa	Abogado	X			X
1500	2500	2300	1950	2400	2200	X				Irland., inglesa, inglesa	—		X		X
1600	»	»	1800	»	»	X				Francesa	—	X			X
2300	1700	1750	2500	1150	2000	X				Escocesa	—		X		X
»	»	»	»	»	»		X			Noruega	Dentista		X		X
1650	1550	1800	1400	1650	1750	X				Francesa, inglesa	Abogado	X			X
1500	2100	2600	1550	2000	3150	X				Inglesa	—	X			X
2000	2350	2500	1950	2300	2650	X				Escocesa, inglesa	—	X			X
1650	1800	2450	1015	2200	2800	X				Inglesa, galesa	—		X	X	
1600	»	»	850	»	»	X				Noruega, escocesa	Ingeuiero	X		X	
1000	1000	1050	1100	1400	1050	X				Inglesa, holandesa	Abogado		X	X	
2575	1550	2350	2650	1250	2250				X	Inglesa	—	X			X
1000	1500	1560	950	1200	1050		X			Irlandesa, inglesa	—	X			
855	»	»	950	»	»				X	Ingl., escocesa, irland.	—	X			X
1500	1800	1500	2000	1700	1600				X	Escocesa, irland., ingl.	Banquero	X		X	
1500	1750	2400	1800	2250	2300	X				Alem., inglesa, escocesa	Abogado		X		X
1600	1650	2000	1450	1500	2500		X			Escocesa, alemana	Educador		X		X
1550	1700	1800	1350	1600	1950	X				Galesa, inglesa, escocesa	Abogado		X		X
2050	2600	3600	2050	2450	3000	X				Escocesa, holandesa	Educador	X			X
2300	1650	2300	2700	1700	2700		X			Inglesa, irlandesa	Manufactur.				X
850	»	»	800	»	»	X				Escocesa, inglesa	Granjero		X		X
1300	»	»	1100	»	»		X			Inglesa, alemana	Comerciante		X		X
1000	1550	1500	1100	1750	1800		X			Inglesa, escocesa	Dentista		X		X
3000	2760	3060	2700	3200	3700		X			Inglesa, inglesa	Abogado	X			X

Medidas antropológicas, fisiológicas y sociológicas

Número	Edad	Antropológicas — Medidas de la cabeza en milímetros — Longitud	Anchura	Altura	Estimación de — Capacidad craneana c. c.	Peso del cerebro gramos	Cuerpo en centímetros cúbicos — Estatura cm.	Altura sentado cm.	Envergadura cm	Circunferencia del pecho	Peso en libras	Cara en milímetros — Longitud mm.	Anchura mm.	Nariz en milímetros — Longitud mm.	Anchura mm.	Fisioló… — Fuerza de compresión de la mano kilogramos — Derecha	Izquierda	Ambas manos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
36	50	194	156	141	1568	1473	191	94	199	104	191	93	124	32	18	40	29	69
37	50	188	156	134	1470	1367	183	93	180	105	200	93	126	33	13	48	45	93
38	50	201	150	141	1563	1469	170	84	170	98	180	98	136	36	19	41	32	73
39	51	200	160	146	1687	1602	169	84	176	98	155	96	138	32	18	39	36	75
40	51	200	160	137	1602	1522	177	92	178	104	170	111	122	65	13	42	38	80
41	51	192	146	141	1476	1371	177	92	172	97	167	98	120	32	11	35	29	64
42	52	204	160	139	1646	1564	181	93	182	105	200	106	130	29	17	28	25	53
43	52	198	162	146	1691	1605	177	88	181	93	167	93	128	27	17	41	40	81
44	52	194	162	134	1518	1427	182	86	180	106	217	96	150	27	14	45	44	89
45	52	196	160	145	1642	1560	167	90	171	104	169	107	136	37	16	34	35	69
46	53	192	150	134	1432	1332	178	91	178	105	196	103	130	32	16	31	32	63
47	53	194	162	154	1737	1668	175	96	166	89	144	106	130	29	11	34	34	68
48	53	196	150	135	1480	1377	170	87	197	95	148	90	134	32	20	29	25	54
49	53	196	150	136	1489	1384	171	83	175	106	205	95	114	28	17	31	25	56
50	54	192	160	136	1541	1448	171	87	176	101	175	99	140	32	18	38	29	67
51	54	182	144	133	1341	1234	173	92	167	94	156	98	134	32	13	45	38	83
52	54	214	154	144	1707	1639	186	90	194	110	225	116	134	36	21	38	35	73
53	55	192	156	130	1458	1356	181	92	183	96	165	85	138	38	21	32	35	67
54	55	192	152	141	1524	1432	173	90	194	112	205	116	124	34	22	38	36	74
55	55	194	156	142	1577	1482	174	87	178	104	175	100	128	33	14	42	38	80
56	56	196	156	141	1581	1486	177	84	167	99	178	97	124	30	16	26	24	50
57	56	212	154	147	1723	1654	184	93	177	109	225	88	130	27	20	31	24	55
58	56	192	160	144	1615	1534	175	84	173	112	175	97	142	28	16	»	»	»
59	56	196	156	135	1523	1432	180	72	175	119	205	97	130	40	18	32	32	64
60	56	188	144	131	1358	1250	177	80	182	85	133	97	122	32	17	34	33	67
61	56	208	162	152	1819	1764	185	91	180	92	166	83	134	28	19	38	34	72
62	57	194	150	159	1675	1591	178	92	173	89	178	93	134	32	15	29	29	58
63	57	202	152	139	1568	1473	172	86	167	120	174	96	140	33	12	42	20	62
64	57	201	154	150	1675	1591	174	»	168	99	176	97	124	32	15	36	37	73
65	57	184	160	143	1552	1459	175	89	178	95	158	96	128	42	13	30	28	58
66	58	198	158	139	1591	1495	163	88	165	104	174	104	128	35	16	22	16	38
67	58	192	146	144	1504	1414	167	91	160	92	142	78	114	30	16	36	28	64
68	59	212	162	148	1807	1753	176	99	176	90	264	112	138	37	21	55	55	110

de 89 miembros del Congreso (continuación)

gicas						Sociológicas									
Presión con el « algometer » temporal						Instrucción				Ascendencia	Ocupación	Época y lugar de nacimiento			
Derecha			Izquierda												
Apenas desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Apenas desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Universidad	Colegio	Academia	Escuela común			Verano	Invierno	Ciudad	Campo
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
2100	1750	1500	2000	1750	1950	×				Escocesa, irlandesa	Maest., abog. granjero.		×		×
1700	1800	1800	2000	1600	1800	×				Inglesa, inglesa	Abogado		×		×
1750	2100	1950	2000	2450	»			×		Alemana, holandesa	Granj., banq.	×			×
1600	1700	2300	1400	2050	2300		×			Escocesa, galesa, inglesa	Abogado		×		×
1800	2000	2300	1700	2000	2200	×				Escoc., irlandesa, ingl.	—		×		×
1750	»	»	1650	»	»	×				Inglesa, galesa	—	×			×
1250	2000	225	1450	2000	2300	×				Inglesa, inglesa	—		×		×
1250	»	»	1150	»	»			×		Inglesa, escocesa			×	×	
2150	»	»	1950	»	»	×				Alemana, alemana	Abogado		×	×	
2000	2800	4000	2400	3800	4000		×			Holandesa, francesa	Editor autor		×		×
1200	»	»	1500	»	»		×			Serbia, francesa, españ.	Médico	×			×
1050	800	»	1150	750	»				×	Ingl., escocesa, francesa	Abogado		×		×
1300	»	»	1400	»	»		×			Escocesa, holandesa	—	×			×
953	1050	1400	950	1550	1100				×	Inglesa, ingl., escocesa	—	×			×
1100	1250	1250	1800	1500	2050		×			Escocesa, inglesa	—		×		×
1600	1400	»	1655	1500	»			×		Escocesa, inglesa	Comerciante		×		×
2450	2650	3100	2550	3600	4000		×			Escocesa, inglesa	Abog. productor aceite.		×		×
950	»	»	800	»	»	×				Escocesa?	Abogado		×		×
2350	2300	3000	3650	2500	3100		×			Inglesa, holandesa	—	×			×
1100	1500	1500	1100	1350	1750	×				Alemana, inglesa	Médico	×			×
1500	2000	2000	950	2000	2900	×				Escocesa, inglesa	Abogado		×		×
1600	2100	2650	2050	2200	2260	×				Inglesa, escocesa	—		×		×
1800	»	»	2000	»	»	×				Escocesa	—				×
1750	1250	»	2305	1450	»	×				Noruega	Comerciante		×	×	
1500	1100	1000	1700	1100	1000	×				Noruega	Predicador		×		×
550	700	»	1000	900	»	×				Escocesa, irlandesa	Abogado	×			×
1200	1500	1450	1250	1150	1500	×				Escocesa, irlandesa	—	×			×
1500	»	»	1200	»	»				×	Escocesa, irlandesa	—		×		×
2100	»	»	2050	»	»	×				Inglesa, inglesa	Abog. comerc.		×	×	
1000	»	»	950	»	»	×				Escocesa, inglesa	Abogado		×		×
1300	1700	2050	2000	1800	2250		×			Inglesa, inglesa	—	×		×	
1500	1100	»	2150	1250	»	×				Escocesa, francesa	—	×			×
1650	2050	2500	1750	2400	2500	×				Holandesa, irlandesa	Granjero		×		×

Medidas antropológicas, fisiológicas y sociológicas

Edad	Número	Antropológicas: Medidas de la cabeza en milímetros			Estimación de		Cuerpo en centímetros cúbicos					Cara en milímetros		Nariz en milímetros		Fisiol…: Fuerza de compresión de la mano kilogramos		
		Longitud	Anchura	Altura	Capacidad craneana c. c.	Peso del cerebro gramos	Estatura cm.	Altura sentado cm.	Envergadura cm.	Circunferencia del pecho	Peso en libras	Longitud mm.	Anchura mm.	Longitud mm.	Anchura mm.	Derecha	Izquierda	Ambas manos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
69	60	206	160	138	1649	1566	187	93	189	108	203	101	152	46	20	»	»	»
70	60	202	162	149	1747	1678	177	83	178	122	223	100	150	22	23	40	30	7
71	60	199	154	144	1610	1529	184	»	194	107	268	103	142	15	17	25	32	5
72	60	192	154	137	1505	1415	178	87	181	105	184	103	140	34	17	35	32	6
73	60	194	146	144	1513	1422	177	88	179	92	150	96	120	46	29	34	26	6
74	62	194	142	130	1367	1258	179	88	183	106	193	93	120	33	18	38	35	7
75	62	204	166	145	1756	1687	175	92	172	105	192	94	134	31	19	35	29	6
76	63	188	152	133	1432	1332	182	97	185	104	202	97	136	35	13	41	38	7
77	63	200	151	137	1529	1437	181	91	179	91	150	104	131	33	17	33	32	6
78	63	202	146	138	1509	1418	188	96	189	105	202	116	130	28	22	»	34	»
79	63	198	164	143	1595	1499	173	90	173	101	190	98	124	34	18	22	19	4
80	65	206	154	133	1552	1450	176	90	178	106	193	117	128	48	20	49	44	9
81	66	194	166	144	1677	1593	177	83	173	113	208	102	146	33	17	27	18	4
82	66	194	162	137	1579	1484	171	82	175	89	149	101	132	15	17	36	28	6
83	66	200	151	135	1511	1420	176	84	168	101	180	89	136	27	25	27	27	5
84	67	190	150	143	1512	1421	169	94	164	92	145	103	132	33	14	24	26	5
85	68	198	156	134	1647	1454	182	94	184	96	185	100	134	33	22	34	30	6
86	68	196	154	141	1565	1471	176	79	178	98	163	97	126	40	21	30	18	4
87	69	196	152	146	1593	1497	181	91	184	110	217	110	140	33	16	32	30	6
88	69	192	156	139	1538	1445	158	80	159	105	170	95	140	40	18	33	25	5
89	75	182	150	135	1399	1286	180	88	183	110	183	95	154	»	»	27	17	4
t. m.	53	196	156	139		1450	177	90	178	104	183	»	»	»	»	38	33	7
		7.71	6.14	5.47		50	90	35	70	40	»	»	»	»	»	85	73	15
		Pulgadas				Pulgadas					Lbs.	»	»	»	»	Libras		

Inglesa	32
Escocesa	28
Alemana	8
Noruega	6
Irlandesa	5
Francesa	4
Galesa	3
Holandesa	3

le 89 miembros del Congreso (conclusión)

…cas						Sociológicas									
Presión con el «algometer» temporal						Instrucción						Época y lugar de nacimiento			
Derecha			Izquierda												
…desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Apenas desagradable	Molesta	Casi dolorosa	Universidad	Colegio	Academia	Escuela común	Ascendencia	Ocupación	Verano	Invierno	Ciudad	Campo
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
800	»	»	800	»	»			×		Inglesa, inglesa	Granjero		×		×
500	»	»	1300	»	»	×				Francesa, galesa	Abogado	×		×	
250	1650	2050	1150	1650	2050	×				Galesa, inglesa	—		×	×	
400	1550	2250	1900	2900	2450	×				Ingl., escocesa, irland.	—	×			×
000	1950	2000	2000	2200	2300			×		Inglesa, inglesa	—		×		×
750	1500	1750	1625	1250	1000		×			Holandesa	—		×		×
950	1650	2250	2600	2000	2100	×				Inglesa, escocesa	—	×			×
000	2000	2600	3800	3250	3000		×			Escocesa, irlandesa	—	×			×
500	1450	1750	1200	1600	1750		×			Galesa, inglesa	Curtidor		×	×	
050	»	»	1050	»	»			×		Inglesa, holandesa	Comerciante		×	×	
300	1650	1750	1400	1500	1800	×				Escoc., francesa, inglesa	Educador	×			×
150	1800	2000	2400	2100	2500				×	Escocesa, inglesa	Granjero		×		×
020	2001	2000	1001	4600	2400	×				Alemana, ginebrina	Editor		×	×	
750	2350	2200	1900	2500	2700	×				Irlandesa, irlandesa	Abogado	×			×
700	»	»	750	»	»	×				Inglesa, escocesa	—		×		×
050	1150	»	1750	2000	»	×				Escocesa, escocesa	—		×		×
400	1500	2450	2000	1900	2750			×		Inglesa, inglesa	Granjero	×			×
250	1300	2050	1250	1250	1600	×				Alemana, inglesa	Abogado		×	×	
800	1800	2400	1800	1800	2350				×	Inglesa, irlandesa	Comerciante		×		×
600	»	»	1550	»	»	×				Inglesa, escocesa	Abogado		×		×
750	»	»	1000	»	»	×				Escocesa	—		×		×
582	1784	2166	1662	1855	2356	52	21	7	9			35	50	19	70
56	63	76	58	65	83	»	»	»	»			»	»	»	»
Onzas						Total						Total			

Abogados	56
Educacionistas, ...	5
Comerciantes	12
Granjeros	8
Médicos..............	2
Otras profesiones......	6

DATOS QUÍMICOS SOBRE EL MAL DE PLOMO

Por el Dr e Ingº agrónomo CARLOS M. ALBIZZATI

Por intermedio de la sección de Fito-Patología me enteré que en el campo de experimentación de la Facultad de agronomía de La Plata, encontrábanse algunos damascos *(prunus armeniaca)* que presentaban los caracteres de la enfermedad del plomo, denominada así por la coloración plomiza que presentan las hojas atacadas de dicha enfermedad.

Investigadores como Percival, Pickering, Brooks, Gussow indican que la enfermedad es de origen criptomágico, siendo quien produce la alteración de los tejidos el micelio del *Stereum Purpureum* Pers.

Otros sostienen que la causa de la enfermedad es debida a insectos nocivos, y es así que Arnaud indica el *Heliotrips haemorrhoidalis* Bouche; el profesor L. Gaboto es del mismo parecer. E. Prillieux describe la enfermedad por primera vez y la considera como una alteración puramente de orden fisiológico. Aderhold comparte de la misma opinión, e igual Mangin, quienes atribuyen dicha enfermedad a una deficiencia en el metabolismo del calcio.

Masee sostiene que la causa de la enfermedad es debida a la acción de una diastasa hidrolizante localizada en la lámina media de la hoja.

Se encontraba así planteada la cuestión cuando el profesor L. Petri (1916-1917) inicia sus trabajos fito-químicos sobre dicha enfermedad, llegando a la conclusión de que el proceso de la hidrólisis sobre el complejo pecto-celuloso era debido a acciones diastásicas. Ciferri, en 1923, comprueba la hipótesis sostenida por Petri y Masee.

Basándome en los estudios de los autores arriba citados, y para comprobar una vez más desde el punto de vista fito-químico las anomalías que para dichos autores son características en dicha enfermedad, he realizado este estudio siguiendo la técnica indicada por Ciferri, habiendo obtenido los datos que a continuación expreso.

PREPARACIÓN DE LAS MUESTRAS

Es condición indispensable para efectuar esta clase de trabajos que las muestras sean recogidas en iguales condiciones, es decir, que tanto las hojas sanas como enfermas se tomarán a la misma hora y en la misma época, y que las condiciones del suelo sean análogas en su constitución agrológica.

Las determinaciones analíticas fueron hechas sobre hojas de plantas enfermas y sanas en el período de vegetación correspondiente a los meses de noviembre y diciembre, habiendo efectuado las siguientes determinaciones.

DATOS ANALÍTICOS

Las determinaciones químicas que he considerado fueron : humedad, cenizas, nitrógeno total, nitrógeno nítrico y nitroso, materias albuminoideas, azúcar reductor, pentosanos, celulosa, acidez, oxalatos solubles e insolubles, poder diastásico.

Humedad. Se valoró en cápsula plana sometiendo las hojas hasta peso constante a la temperatura de 105° C.

Cenizas. Se efectuó su determinación en cápsula de cuarzo a la temperatura de rojo sombra, presentando éstas una coloración grisácea.

Nitrógeno total. Esta determinación la efectué por el procedimiento de Kjeldahl.

Nitrógeno nítrico y nitroso. Previa maceración en agua durante 6 horas e investigando por vía colorimétrica.

Azúcares reductores. Esta determinación la realicé siguiendo el procedimiento hidro-alcohólico, previa defecación con subacetato de plomo, efectuando su valorización con el licor de Fehling.

Pentosanos. Se efectuó su determinación sobre 0,5 gramos por el método de Tollens.

Celulosa. Siguiendo el método operatorio de H. W. Wiley.

Acidez. Adoptando la técnica de Toht.

Oxalatos solubles e insolubles. Se determinó sobre 100 y 50 gramos de hojas de acuerdo al modo operatorio indicado por Berthelot.

Poder diastásico. Para poder constatar la existencia del fermento hidrolítico, he seguido en todo el *modus operandi* del doctor Ciferri

con pequeñas variantes, 10 gramos de hojas enfermas e igual cantidad de las sanas fueron cortadas en trozos pequeños y trituradas luego en un mortero que contenía arena cuarzosa y agua, dejando todo en maceración 24 horas.

Para no tener pérdida de diastasa, el autor no aconseja el método de Payen y Persoz basado en la p. p. por alcohol, previo el calentamiento a 70° C, debido a que la cantidad de diastasa es escasa en la maceración de las hojas, aconsejando que el líquido macerado se filtre por medio de una bujía de Chamberland, a una presión más o menos de 5 atmósferas, concentrándose lo filtrado en frío y al vacío por un desecador sulfúrico ligado a una trompa de agua, hasta reducir el líquido a un volumen de 50 centímetros cúbicos, efectuando todo esto con las precauciones necesarias usadas en la técnica bacteriológica.

Este líquido se hace actuar sobre la pectina extraída de la zanahoria *(daucus carota)* de acuerdo al método de Bertrand y Malleke difiriendo únicamente en ésto al método usado por Ciferri, que lo efectuaba de acuerdo al procedimiento de Behrens y Storner.

Una vez obtenida la pectina se coloca en tubos con taras conocidas, se esteriliza calentándolos durante una hora en baño-maría en tres días consecutivos, volviendo a pesar previo secado en la estufa a 40° C, así conocía la cantidad de pectina que contenía cada tubo.

Tomé los tubos, agregué según el peso en pectina una parte proporcional del líquido activo llevando luego a la estufa a una temperatura de 30° C.

La cantidad de azúcar la avalué al iniciar la experiencia y sucesivamente cada 24 horas, previa disecación del líquido con acetato de plomo evaluando el azúcar por medio del licor de Fehling.

Observa Bourquelot que no debemos conformarnos con una clase de pectina, pues en un mismo vegetal existen varias, diferenciándose por su valor rotativo.

RESULTADOS

	Hojas sanas	Hojas enfermas
Humedad residual	3.124	3.126
Cenizas	9.060	9.057
Nitrógeno	2.800	2.798
Nitrógeno nítrico	V	V
Nitrógeno nitroso	O	V
Materias proteicas x (6.25)	17.500	17.487
Azucares reductores	3.690	3.825

	Hojas sanas	Hojas enfermas
Pentosanos	11.450	11.453
Celulosas	18.160	18.125
Acidez en ácido tartárico	0.647	0.843
Oxalato soluble en ácido oxálico	0.647	0.056
Oxalato insoluble en ácido oxálico	3.616	3.627
Oxalato soluble en oxalato potásico	0.091	0.101
Oxalato insoluble en oxalato cálcico	5.226	5.217

PODER DIASTÁSICO

	Hojas sanas	Hojas enfermas	Diferencia de azúcar
Día 0	0.0027	0.0054	0.0027
— 1	0.0169	0.0398	0.0129
— 2	0.0183	0.0493	0.0310
— 3	0.0198	0.0995	0.0797
— 4	0.0202	0.1037	0.0835
— 5	0.0202	0.1099	0.0897
— 6	0.0201	0.1170	0.0978

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Al tratarse el nitrógeno total se notan pequeñas diferencias, no siendo factible deducir conclusiones, desde que la acumulación del nitrógeno en las hojas es transitoria, pues varía de una manera apreciable desde el principio de la vegetación hasta el final.

El nitrógeno nítrico y nitroso se encuentra en las hojas enfermas y sanas, prevaleciendo este último con más intensidad en las hojas enfermas; datos éstos investigados por reacciones colorimétricas, no queriendo afirmar con ésto que las hojas sanas no lo contengan.

En cuanto a los azúcares reductores en las determinaciones efectuadas, se nota marcadamente una mayor cantidad en las plantas enfermas, donde ya con este dato nos pondría en evidencia de que es obra de una diastasa, la que se encargaría de producir la hidrólisis de las paredes celulares y, por lo tanto, la formación de azúcar tipo xilosa-arabinosa, etc.

En lo que se refiere a la celulosa se observa una diferencia digna de tenerse en cuenta entre las hojas enfermas y las sanas, mostrándonos que efectivamente existe una diastasa en mayor cantidad en las hojas enfermas, que es la que paulatinamente efectúa la destrucción pecto-celulosa.

La acidez fué expresada en ácido tartárico siguiendo el procedimiento de Toht, habiendo obtenido un aumento en las plantas enfermas, dato observado también por Petri y Ciferri en los trabajos publicados por ellos.

Las cifras obtenidas dan un resultado disiinto a las anotadas por dichos autores, resultado que he de suponer sea debido a que en el desarrollo de hojas caducas la acidez va en aumento desde la foliación hasta la caída de las hojas, donde al final ya se encuentra una menor acidez por insolubilización de las mismas por las sales de calcio.

En los oxalatos solubles e insolubles se nota diferencia entre ambos, observándose que es mayor en la enferma la cantidad de oxalatos solubles y menor la cantidad de oxalatos insolubles con respecto a la planta sana, de donde se deduce que el calcio se encuentra en déficit para neutralizar la función ácida de las hojas.

La prueba experimental que he efectuado sobre la acción diastásica ha corroborado categóricamente lo afirmado por el profesor R. Ciferri de que en las plantas enfermas existe una diastasa hidrolizante en mayor cantidad en las células de la epidermís superior capaz de producir la descomposición del pectato-cálcico, substancia ésta del grupo de las materias pécticas ligadas íntimamente a la hemicelulosa, familia ésta muy próxima a los hidratos de carbono, dando como producto final en su hidrólisis, azúcares.

En los datos obtenidos no he observado la variante de diminución de los azúcares en las hojas sanas al quinto día, como indica Ciferri.

BIBLIOGRAFÍA

ALLEN, A. H., *Commercial Organic Analysis,* Londres, 1898.

DUCLAUX, E., *Traité de Microbiologie,* París, 1899.

BERTHELOT, M., *Chimie Végétale et Agricole,* París, 1899.

DELACROIX, G., *Maladies nom parasitaires des plantes cultivées,* París, 1908.

SOAVE, M., *Chimica Vegetale è Agraria,* Milano, 1916.

CIFERRI, R., *Note esperimentale sul mal de piombo,* en *Revista de Patologia Vegetale,* año XIII, nº 1-2, 1923.

HERRERO DUCLOUX, E., *Datos analíticos de los tabacos comerciales y sus falsificaciones,* La Plata, 1923.

RAVENNA, C., *Chimica Vegetale.* Bologna, 1925.

Laboratorio de Química Agrícola, La Plata, febrero 28 de 1927.

SOBRE ALGUNOS PRINCIPIOS DE ECONOMÍA MATEMÁTICA PURA

Por LUDOVICO CAVÁNDOLI

La economía matemática no tiene numerosos adeptos. Hay más bien prevenciones en contra de esta rama de ciencia, prevenciones que en parte son debidas a los que de ella han escrito. Ninguno de los autores de obras de economía matemática, ni el mismo Pareto, el mayor de ellos, han adoptado franca y exclusivamente el método común a las demás ciencias físicomatemáticas. Algo les ha quedado siempre de la verbosidad económica. Yo he querido hacer una tentativa que tendrá o no tendrá éxito. Lo cierto es que en un libro, que desde muchos años lentamente estoy preparando, he tratado los problemas de la economía con el mismo método y los mismo procedimientos con que habría tratado problemas de mecánica racional o de otra ciencia parecida. En la imposibilidad por el momento de publicar el libro completo. aprovecho la benévola hospitalidad que me concede la Sociedad Científica Argentina en sus *Anales,* para hacer conocer el capítulo II de la obra que es el fundamental de toda la teoría.

En el se estudia la *transformación individual* de los bienes. Esta transformación individual es el verdadero fenómeno elemental en que se funda todo hecho económico. Los escritores de economía matemática, como por ejemplo Stanley Jevons y Walras, han tomado como hecho elemental el cambio de dos bienes entre dos individuos. Ahora bien, este hecho es en vez muy complejo y no puede ser estudiado completamente si antes no se conocen los principios de la transformación individual. Citaré como prueba solamente que los dos valientes economistas citados han creído hallar la solución del problema que se habían propuesto resolver, mientras de un análisis del mismo resulta que es un problema que o tiene infinitas soluciones posibles (es indeterminado) o no tiene ninguna solución (es imposible).

Basta examinar por un momento un hecho económico cualquiera para comprender que en principio, se presentan siempre individuos que en posesión de algunos bienes buscan transformarlos en otros bienes que les produzcan una utilidad (placer, deseo, etc.), mayor de la que les producían los bienes que poseían al principio. Esta transformación se puede hacer de muchas maneras, con la producción propiamente dicha, con el cambio o con mezcla variable de los dos medios. También resulta cierto de una primera observación que el individuo que opera económicamente no tiene en cuenta más que la utilidad propia y no se preocupa de la utilidad de los demás. No olvidemos que estamos y quedaremos en el campo de la economía pura y que no debemos ocuparnos de fenómenos éticos, religiosos, etc. Estamos en el mismo caso del geómetra que no admitiría que alguno en la solución de un problema geométrico quisiera hacer valer principios de moral o de fe. No sorprenda la comparación. En las ciencias sociales estas intervenciones de elementos extraños son muy comunes. Por esto están tan atrasadas respecto a las ciencias naturales.

Se comprende pues la necesidad de estudiar primero al individuo en sus transformaciones de bienes. Y para conservar, según el fecundo método de las matemáticas la generalidad mayor posible, no se hacen hipótesis sobre la naturaleza de las leyes que necesariamente gobiernan las transformaciones. Dejo a ellas la mayor generalidad posible admitiendo solamente que el individuo no puede operar transformaciones a su antojo. Las leyes que rigen las transformaciones se expresan con un símbolo general de función. La búsqueda de las propiedades de las varias funciones posibles, constituirá precisamente el estudio de cada uno de los fenómenos económicos.

El estudio de la transformación individual viene a ser así respecto al desarrollo de las teorías económicas algo como la cinemática lo es respecto a la dinámica. Es bien entendido que me refiero al método, y a nada más. Los fenómenos económicos son muy distintos de los que se estudian en mecánica. Usar expresiones como estática o dinámica económica es valerse de metáforas que a nada conducen o conducen a errores. Por mi parte las excluyo rigurosamente.

Voy a hacer una última observación. Hay quien cree que la economía matemática busca soluciones numéricas o cuantitativas de los fenómenos económicos. Están muy equivocados. Aunque el ilustre Pareto haya en varias ocasiones procurado desengañar a los que así creen, no es superfluo repetirlo, es verdad, con autoridad muy inferior a la de aquel gran sociólogo y economista. Los fenómenos económicos

son muchos, muy complejos e interdependientes unos de otros. La matemática es el único instrumento de lógica superior que puede servir para estudiar esta interdependencia, pues la lógica común es impotente para este objeto. Los lectores que me sigan verán precisamente que ésto y nada más que ésto es lo que justifica y, a mi criterio, hace necesario el empleo del método matemático.

RESUMEN DEL CAPÍTULO I

En el libro hay un primer capítulo donde se dan las definiciones y algunos principios necesarios para el desarrollo de las teorías. Como la lectura de aquel capítulo no es muy entretenida, pues es en muchos puntos detallado, debido al deseo de conservar siempre el rigor matemático, voy a resumir aquí algunos puntos necesarios para la comprensión de mi exposición.

Los *bienes* están constituídos por todo lo que satisface a una necesidad o procura un placer al individuo. Se dividen en *bienes de consumo* y en *bienes de uso.* Bienes de consumo son los que se transforman de manera de no poder satisfacer nuevamente a la misma necesidad. Son de uso los que se pueden emplear sucesivamente para la satisfacción de una misma necesidad durante un tiempo indefinido. El bien de consumo puede emplearse en dos maneras distintas. Se consume todo sin interrupción, un vaso de agua, por ejemplo, y entonces es bien de *consumo inmediato.* Se consume, en vez, por partes, en épocas sucesivas, pero separadas de manera que la necesidad que la parte consumida anteriormente había satisfecho, aparece nuevamente. En este caso el bien es de *consumo diferido.*

Los fenómenos económicos no son iguales para las tres clases de bienes. Estudiados, empero, los bienes de consumo inmediato, se pasa fácilmente al estudio de las otras dos clases de bienes. Precisamente como en mecánica, estudiado el punto se pasa fácilmente al sistema rígido y al sistema deformable. Repetimos que la analogía no está más que en el método. En lo que sigue sin necesidad de repetirlo nos referiremos siempre y únicamente a los bienes de consumo inmediato.

El hombre no dispone libremente de los bienes. Salvo algunas excepciones más aparentes y de circunstancia que reales y permanentes, el hombre obtiene bienes transformando los que posee. Conviene para generalizar la teoría incluir entre los bienes lo que no satisface a necesidades de los hombres, pero sirve para obtener otros bienes. El

trabajo humano es el ejemplo principal de estos bienes. Un hombre que saca agua de un pozo transforma su trabajo en agua para apagar su sed. La cantidad de bienes que un hombre posee, por grande que sea, es siempre limitada. Resulta que tampoco puede obtener todos los bienes que lo rodean y está obligado a escoger entre ellos. Esta elección depende de sus gustos. Cualquiera sean estos se observa que hay bienes sobre cuya elección influye la presencia de otros bienes. Por ejemplo, el disponer o no de azúcar influye sobre la elección de café en vez de otro bien. Los bienen que tienen esta influencia uno sobre otro, se llaman *dependientes,* los que no tienen esta influencia son *independientes.* Volveremos sobre esta clasificación de bienes dependientes e independientes en forma más precisa y matemática.

Admitiendo ahora que en todas transformaciones el individuo busca los bienes para consumirlos, no para transformarlos nuevamente, pues este es un caso complejo que ya será estudiado a su tiempo, se pueden aceptar estos dos axiomas :

a) Si se ofrece a un individuo la elección entre dos cantidades de un mismo bien, el individuo elegirá siempre la mayor ;

b) Si un individuo en la elección entre A *y* B *prefiere* A *y en la elección entre* B *y* C *prefiere* B, *en la elección entre* A *y* C *preferirá* A.

Del primer postulado resulta que un individuo preferirá siempre una cantidad de cualquier bien a una cantidad nula de cualquier otro bien.

De los dos axiomas precedentes se deduce mediante el razonamiento el principio siguiente :

Para cantidades de dos bienes A *y* B, *inferiores a ciertos límites dados por la experiencia, es siempre posible hallar para cada cantidad de* A *una cantidad de* B *que es indiferente con ella respecto a un individuo y recíprocamente para cada cantidad de* B *se puede hallar una cantidad de* A *que es indiferente con ella.*

Indiferente quiere decir que el individuo entre las dos cantidades no prefiere ni una ni otra y acepta de la misma manera cualquiera de las dos.

Este concepto de la indiferencia debido en máxima a Edgeworth y a Pareto es muy fecundo, pues corresponde al concepto de igualdad de las otras ciencias matemáticas.

Es bien entendido que las cantidades indiferentes varían de individuo a individuo.

El hombre, en general, no posee un solo bien. Posee varios bienes, es decir, lo que llamaremos una *combinación de bienes.* Si a, b, c, ..., son las cantidades que el individuo posee, respectivamente, de los bienes A, B, C, ..., indicaremos su combinación con (a, b, c, ...). Si dos

cantidades a y b respectivamente de los bienes A y B son indiferentes para un individuo, escribiremos $(a) = (b)$.

De estas simples nociones con un razonamiento algo largo, pero riguroso, se llega a establecer el principio siguiente, que es el fundamental de toda la teoría :

Tomando a placer una cantidad de bien cualquiera como unidad fundamental, a cada cantidad real y positiva de un bien de consumo inmediato, corresponde un número también real y positivo (índice) y recíprocamente : a cualquier número tomado como índice corresponde una cantidad determinada de un bien dado. Los índices cambian de individuo a individuo. La correspondencia entre bien e índice es unívoca, es decir, para un mismo individuo, a cantidades distintas de bienes corresponden índices distintos, y a un mismo índice corresponde siempre la misma cantidad del mismo bien. Esta correspondencia se establece experimentalmente sin hipótesis ninguna sobre la acción de los bienes en el individuo.

Entre una cantidad de bien y su índice pasa la relación necesaria y suficiente para que dos cantidades sean funciones una de otra. La palabra función se toma aquí en sentido general independientemente de toda representación analítica.

Si x es una cantidad del bien X, podremos siempre imaginar una función de x que indicaremos con $I(x)$ que, para cada valor de x toma el valor del índice de x. Esta función es unívoca y real. La función $I(x)$ podremos siempre construirla con la aproximación que nos plazca. La indicaremos con el nombre de *función índice* o simplemente *índice del bien.*

Si x e y son cantidades de dos bienes distintos X e Y los índices $I_1(x)$ e $I_2(y)$ son funciones, en general, distintas. Con esto no entendemos decir que tienen representación analítica distinta, pues ignoramos esta representación: queremos simplemente decir que si $x = y$ en general $I_1(x)$ no es igual a $I_2(y)$. Decìmos en general pues no está excluído, que en casos particulares para $x = y$ sean también iguales los valores de los índices. Así por $x = 0$ es siempre $I(x) = 0$ cualquiera sea el bien.

La función índice la supondremos siempre continua; a más es siempre función creciente de x. Mientras x varía entre 0 y el infinito, $I(x)$ varía entre 0 y un cierto valor L. Es decir, $I(x)$ tiende al límite L cuando x crece sin límites. L es distinto para cada bien.

Importantísimas para la teoría son las propiedades de la derivada de $I(x)$ respecto a x, y que llamaremos índice elemental de x, indicán-

dola con $I'(x)$ o $\frac{dI}{dx}$. $I'(x)$ es función decreciente por x creciente. Su valor máximo lo toma en el punto $x = 0$ y tiende a cero por x infinitamente grande. El valor $I'(0)$ es distinto para cada bien como lo es $I(\infty)$. En vez son siempre nulos. cualquiera sea el bien, $I(0)$ e $I'(\infty)$. También $I'(x)$ es supuesta siempre continua y finita y admite siempre a su vez la derivada $I''(x)$. Ya que $I'(x)$ es decreciente, $I''(x)$ es siempre negativa. Su valor lo supondremos en todo caso finito.

Será

$$I(x'') - I(x') = \int_{x'}^{x''} I'(x)\, dx$$

o siendo $I(0) = 0$

$$I(x) = \int_0^x I'(x)\, dx.$$

Sirviéndose de esta expresión de $I(x)$ y recordando que $I'(x)$ es decreciente se demuestra fácilmente que si $x = x' + x''$ es

$$I(x) < I(x') + I(x'')$$

y si $x = x' - x''$, supuesto $x' > x''$ es

$$I(x) > I(x') - I(x'').$$

Si disponemos de una combinación de bienes X, Y, Z, ..., también tendremos una función índice bien determinada $I(x, y, z, ...)$ que variará variando $x, y, z, ...$ Es función continua creciente de todas las variables. Si $x = 0$, $y = 0$, ..., es

$$I(0, 0, 0, ...) = 0.$$

Creciendo $x, y, z, ...$, sin límites I tiende a ciertos límites distintos para cada bien.

Si los bienes son independientes es

$$I(x, y, z, ...) = I_1(x) + I_2(y) + I_3(z) + ...$$

si en cambio los bienes son dependientes en general es

$$I(x, y, z, ...) \neq I_1(x) + I_2(y) + I(z) + ...$$

Ya que $I(x, y, z, ...)$ es función continua de $x, y, z, ...$, admitiremos que existen siempre las derivadas parciales $\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}, ...$ respecto a

cada variable. Estas derivadas parciales son funciones también continuas, decrecientes respecto a cada variable y admiten siempre las derivadas parciales respecto a cada variable. Mucho habría que agregar y tendríamos que hacer muchas observaciones sobre el índice de las combinaciones. Pero no podemos entrar en detalles que nos llevarían muy lejos. En el libro que he indicado la teoría de los índices está expuesta con todos los pormenores necesarios.

Las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z},$$

pueden tomar el signo positivo o negativo en todo un intervalo o cambiarlo de un punto a otro. Las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2},$$

son siempre negativas.

Si los bienes son independientes es

$$\frac{\partial I}{\partial x} = I_1'(x), \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = I_1''(x), \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = 0, \text{ etc.}$$

Por el axioma *a)*, del cual hemos salido para fundar la teoría, tendremos que : siendo los índices funciones crecientes de las variables, serán preferidas por el individuo las combinaciones de mayor índice. En una palabra, de dos combinaciones el individuo elegirá siempre la de mayor índice.

Si el individuo posee una cierta combinación de bienes y puede operar transformaciones, las hará hasta que llegue a un máximo (si existe) del índice. En este punto de máximo se detendrá en sus transformaciones. Lo que sigue es precisamente la búsqueda de este máximo.

CAPÍTULO II

TRANSFORMACIÓN DE LOS BIENES DE CONSUMO INMEDIATO

1. En este capítulo vamos a estudiar las transformaciones que un individuo efectúa para aumentar el índice de la combinación de sus bienes. Los bienes los suponemos de consumo inmediato y no tendremos en cuenta más que el índice de los bienes de nuestro individuo,

sin por esto suponerlo aislado : pues, como veremos en breve, el individuo está obligado a obedecer a leyes de transformación que representan precisamente las relaciones que lo unen con otros individuos y con la naturaleza.

Sean A_1, A_2, ..., A_n los bienes de consumo inmediato que están en relación con el individuo en un momento dado. Indicaremos con a_1, a_2, ..., a_n las cantidades que posee, en aquel momento, respectivamente de cada bien, pudiendo algunas de ellas ser nulas. La combinación de estos bienes tendrá para el individuo un índice que indicaremos con

$$I\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

función que supondremos siempre bien conocida en cadauno de sus puntos, y así sus derivadas de primer orden.

Si el individuo puede hacer variar las cantidades a_1, a_2, ..., a_n lo hará siempre que la variación le produzca un aumento de índice. Se detendrá en sus transformaciones cuando llegue a un punto de máximo índice.

Ya sabemos que si I toma un valor extremo en un punto, su diferencial total se anula en aquel punto, es decir, tendremos

$$dI = \frac{\partial I}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial I}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial I}{\partial a_n} da_n = 0. \qquad (1)$$

Si las variables a_1, a_2, ..., a_n son todas independientes, la (1) será satisfecha solamente en el caso que sean

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \qquad (2)$$

y no hay necesidad de investigaciones ulteriores para ver que las (2) corresponden a un punto de máximo. Dada la definición de las derivadas parciales del índice, estas pueden ser nulas solamente en los puntos donde las a son infinitas y en este punto el índice tendría su valor máximo absoluto.

Esto concuerda con el concreto, si al hecho de ser las a independientes se le da el significado : que el individuo puede aumentarlas a su placer sin obstáculos. En este caso el individuo aumentaría las cantidades de todos los bienes hasta llegar a la saciedad de todos.

2. El caso indicado en el número precedente no ocurre nunca en el concreto económico. Solamente de algunos contados bienes, y no

en todas las circunstancias, se puede admitir que el individuo pueda gozarlos sin obstáculos. Estos bienes pueden ser excluídos en la teoría, como si no existieran. Los bienes de los cuales nos ocuparemos son los que, en sus transformaciones, deben obedecer a ciertas leyes que, en lenguaje matemático, se expresan con ecuaciones en las cuales figuran las cantidades de bienes que el individuo posee antes de la transformación y las que posee después. Estas leyes resultan de la observación y de la experiencia, y son de varias clases. Algunas son leyes físicas y su estudio corresponde a la tecnología, otras dependen del hecho: que los bienes no son libres, es decir, que no están sujetos solamente a las leyes de la naturaleza: están en poder de otros individuos que a su vez buscan un aumento de índice en sus transformaciones. Por el momento dejaremos la mayor generalidad a la representación de las leyes de transformación sin preocuparnos de su clase.

La transformación de un bien en otro se reduce siempre a un fenómeno elemental. El individuo cede una cantidad de bien para obtener en cambio una cantidad de otro bien. Aquí la palabra *bien* debe ser tomada en sentido amplio. Debe entenderse como bien, no solamente lo que satisface a las necesidades del individuo, pero también todo lo que puede ser transformado en bienes (en sentido estrecho). Con esta extensión del concepto de bien, el trabajo y la moneda son bienes y, como veremos, de los más importantes para el individuo.

3. Si un individuo se encuentra en presencia de los n bienes A_1, A_2, ..., A_n, podrá en general, transformar cada uno de ellos en cada uno de los otros, es decir, que con cada bien puede operar $n - 1$ transformaciones. Así podrá transformar una cantidad x_{12} del bien A_1 en una cantidad x_{21} del bien A_2, una cantidad x_{13} de A_1 en una cantidad x_{31} de A_3, y así sucesivamente con todos los bienes hasta transformar x_{1n} de A_1 en x_{n1} de A_n. Algunas de las cantidades x_{12}, x_{13}, ..., pueden ser nulas, es decir, el individuo puede no operar algunas de las transformaciones indicadas. Lo que se ha dicho para el bien A_1 puede repetirse para los demás bienes, así que las transformaciones que el individuo puede operar con n bienes son en número de $n(n - 1)$. Pero como cada transformación es contada dos veces, pues la transformación de A_p en A_q y la de A_q en A_p pueden ser consideradas como componentes de una misma transformación, en general la transformación que un individuo efectúa con un sistema de n bienes

puede ser considerada como la resultante de $\frac{n}{2}(n-1)$, transformaciones parciales de cada uno de los bienes con cada uno de los otros.

En las relaciones matemáticas que traducen las leyes de transformación de los n bienes, entran las $n(n-1)$ cantidades indicadas en el rectángulo siguiente :

$$(a) \left\{ \begin{array}{llllll} x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{23}, & x_{24}, & \ldots, & x_{2n} \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{34}, & \ldots, & x_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p1}, & x_{p2}, & x_{p3}, & \ldots, & x_{pn} \\ x_{n1}, & x_{n2}, & x_{n3}, & \ldots, & x_{n,\,n-1}, \end{array} \right.$$

donde en general, x_{p1}, x_{p2}, ..., x_{pn} representan las cantidades del bien A_p que se transforman con las cantidades x_{1p}, x_{2p}, ..., x_{np}, respectivamente, de los bienes A_1, A_2, ..., A_n. No existen las cantidades x_{11}, x_{22}, ..., x_{nn}.

4. Siguiendo nuestra exposición admitiremos que una ley de transformación entre los bienes A_p y A_q, matemáticamente se representa con una ecuación en la cual entran *necesariamente* las cantidades x_p y x_q respectivamente de A_p y A_q. Admitiendo por el momento que entre los dos bienes A_p y A_q existe una sola ley de transformación, entre la cantidades (a) existirán $\frac{1}{2}n(n-1)$ ecuaciones, es decir, que de las (a) pueden ser consideradas $\frac{1}{2}n(n-1)$ como independientes y las $\frac{1}{2}n(n-1)$ restantes como dependientes de las primeras.

Tomaremos como variables independientes las indicadas en el triángulo

$$(b) \left\{ \begin{array}{lllll} x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & \ldots, & x_{1n} \\ & x_{23}, & x_{24}, & \ldots, & x_{2n} \\ & & x_{34}, & \ldots, & x_{3n} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & x_{n-1,\,n}, \end{array} \right.$$

y como variables dependientes las indicadas en el triángulo

$$(c)\left\{\begin{array}{lllll} x_{21}, & & & & \\ x_{31}, & x_{32}, & & & \\ x_{41}, & x_{42}, & x_{43}, & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & x_{n3}, & \dots, & x_{n,n-1}. \end{array}\right.$$

Así indicando con $x_{p,q}$ una cualquiera de las variables (a), será independiente si $p < q$ y dependiente si $p > q$. Ya hemos visto que está excluído el caso de $p = q$. Naturalmente se supone siempre $p \leq n$ y $q \leq n$. Como el orden en que indicamos los bienes es arbitrario, la notación indicada es absolutamente general, pudiendo emplear los símbolos de variables independientes para los bienes que más nos convengan.

5. Una notación muy cómoda para las variables (b) y (c) es la siguiente :

La (b) podemos indicarlas con

$$x_{p-s,p} \,(p = 2, 3, \dots, n \,;\, s = 1, 2, \dots, p-1)$$

y las (c) con

$$x_{p,p-s} \,(p = 2, 3, \dots, n \,;\, s = 1, 2, \dots, p-1).$$

Se ve que las cantidades de bienes indicadas con $x_{p-s,p}$ y $x_{p,p-s}$ se corresponden por iguales valores de p y de s. Las leyes de transformación serán representadas por ecuaciones entre $x_{p-s,p}$ y $x_{p,p-s}$. Si en estas ecuaciones entran solamente las variables $x_{p-s,p}$ y $x_{p,p-s}$ la ecuación se puede indicar con

$$x_{p,p-s} = \varphi_{p,p-s}(x_{p-s,p}).$$

Puede suceder, empero, que las leyes de transformación dependan de todas las cantidades de bienes que se transforman en un momento dado. En este caso la ecuación sería de la forma

$$x_{p,p-s} = \varphi_{p,p-s}(x_{12}, \dots, x_{n-1,n}).$$

Observamos, empero, que $x_{p,p-s}$ y $x_{p-s,p}$ deben variar juntas y, en cualquier caso, varíen o no las demás variables, $x_{p,p-s}$ queda cons-

tante si $x_{p-s,p}$ no varía. Podremos, pues. escribir la relación entre $x_{p,p-s}$ y $x_{p-s,s}$ con

$$dx_{p,p-s} = \varphi'_{p,p-s} dx_{p-s,p},$$

donde $\varphi'_{p,p-s}$ puede ser función de todas las variables independientes.

La razón de esta notación reside en que si consideramos todas las variables independientes, con excepción de la $x_{p-s,p}$ que pertenece a la transformación, como parámetros, que en un dado momento pueden considerarse constantes, las φ' son las derivadas parciales de las $x_{p,p-s}$ respecto a las $x_{p-s,p}$ correspondientes, y hasta que los parámetros quedan constantes, pueden ser tratadas como derivadas ordinarias.

6. En una transformación entre $x_{p,p-s}$ y $x_{p-s,p}$ ya hemos visto que una de las cantidades será cedida y la otra adquirida por el individuo. Tomaremos con signo negativo las cantidades cedidas y con signo positivo las cantidas adquiridas, pues las primeras deben ser restadas de las cantidades iniciales de los bienes, y las otras deben ser sumadas a las mismas cantidades. Las cantidades finales de bienes resultantes de una transformación son siempre positivas (cero comprendido). La relación entre $x_{p,p-s}$ y $x_{p-s,p}$ se puede escribir :

$$dx_{p,p-s} + \varphi'_{p,p-s} dx_{p-s,p} = 0.$$

Los valores de $x_{p,p-s}$ y $x_{p-s,p}$ crecen y decrecen juntos, así que $\varphi'_{p,p-s}$ es siempre positiva. A valores finitos de $x_{p,p-s}$ corresponden siempre valores finitos de $x_{p-s,p}$ así que $\varphi'_{p,p-s}$ es siempre finito.

7. Volvamos al individuo que posee las cantidades $a_1, a_2, ..., a_n$ de los bienes de consumo inmediato $A_1, A_2, ..., A_n$ y que formarán una combinación de índice $I(a_1, a_2, ..., a_n)$. Efectuada una transformación con los n bienes, el individuo poseerá las cantidades $X_1, X_2, ..., X_n$, respectivamente de los bienes $A_1, A_2, ..., A_n$, y tendremos

$$X_p = a_p + \sum_{q=1}^{q=n} x_{pq} \qquad (p = 1, 2, ..., n)$$

recordando que x_{pp} es nulo.

Entre las x_{pq} existirán $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones de la forma

$$dx_{p,p-s} + \varphi'_{p,p-s} dx_{p-s,p} = 0, \qquad \text{(T)}$$

que llamaremos el sistema (T) o simplemente las (T).

Después de la transformación el índice del individuo será

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

y el individuo se detendrá en sus transformaciones si este índice llega a un punto de máximo. En este punto será

$$dI = \frac{\partial I}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial I}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial I}{\partial X_n} dX_n = 0. \tag{3}$$

Las $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son funciones de la x_{pq} y tendremos

$$dX_p = -\sum_{q=1}^{q=p-1} \varphi'_{pq} dx_{pq} + \sum_{q=p+1}^{q=n} dx_{pq} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

y, por consiguiente,

$$dI = \sum_{p=2}^{p=n} \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1} \frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p} + \sum_{p=3}^{p=n} \left[\frac{\partial I}{\partial X_2} - \varphi'_{p2} \frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{2p} + \ldots +$$

$$+ \sum_{p=n-1}^{p=n} \left[\frac{\partial I}{\partial X_{n-2}} - \varphi'_{p,n-2} \frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{n-2,p} +$$

$$+ \left[\frac{\partial I}{\partial X_{n-1}} - \varphi'_{p,n-1} \frac{\partial I}{\partial X_n}\right] dx_{n-1,n}.$$

Siendo las $dx_{p-s,p}$ todas independientes, para que sea $dI = 0$, deberán ser satisfechas las $\frac{1}{2} n (n-1)$ ecuaciones

$$\frac{\partial I}{\partial X_{p-s}} - \varphi'_{p,p-s} \frac{\partial I}{\partial X_p} = 0 \qquad \begin{pmatrix} p = 2, 3, \ldots, n \\ s = 1, 2, \ldots, p-1 \end{pmatrix} \tag{S}$$

Los dos sistemae (T) (S) reunidos dan un sistema de $n(n-1)$ ecuaciones entre igual número de incógnitas $x_{p,q}$ y nos permitirán, teóricamente, encontrar un punto extremo del índice, que, si es un máximo, nos dará el punto en el cual se detienen las transformaciones del individuo.

Las (T) son dadas por la experiencia y, por consiguiente, son siempre posibles. En cambio las (S) pueden ser matemáticamente posibles, pero incompatibles, con ciertas condiciones del problema. Así que la solución de (S) (T) puede no convenir al problema. Por consiguiente, la solución de (S) (T) tendrá que ser discutida en cada caso para examinar si es también solución del problema. En cambio ciertas limita-

ciones impuestas por las condiciones iniciales del problema, pueden conducir a soluciones que no son las del sistema (S) (T). A estas soluciones del problema las llamaremos *soluciones incompletas,* mientras diremos *completas* las soluciones de (S) (T), que son también soluciones del problema. Veremos más adelante ejemplos de todas estas soluciones.

Las soluciones de (S) (T), aun si económicamente posibles, pueden corresponder a un mínimo del índice o también a un punto donde no hay extremo. Tendríamos, para distinguir los varios casos, que examinar el segundo diferencial de I. Este segundo diferencial, empero, es tan complejo que de poca o ninguna utilidad sería una discusión general. A más veremos como se simplifica el problema.

8. El sistema (S) (T) nos ofrece un ejemplo de aquellas relaciones que, como hemos indicado al número 38 del capítulo I, pueden servir para construir los índices elementales sin la ayuda de un cuadro de índices.

Efectivamente, supongamos nos sea posible examinar como se comporta un individuo que poseyendo $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente de $A_1, A_2, ..., A_n$ efectúa transformaciones de sus bienes y se detiene en un punto donde las cantidades de sus bienes son $X_1, X_2, ..., X_n$. Si la solución es completa, debemos deducir que en aquel punto hay un máximo del índice. Suponemos que este índice no nos es conocido. Puesto que por la observación conocemos los valores de $X_1, X_2, ..., X_n$ y los de las $\varphi'_{p,p-s}$ en el punto solución, el sistema (S) constituye un sistema de $\frac{1}{2}n(n-1)$ ecuaciones lineales homogéneas entre las n incógnitas

$$\frac{\partial I}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial I}{\partial X_2}, \quad ..., \quad \frac{\partial I}{\partial X_n}.$$

Este sistema admitirá siempre la solución

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial X_2} = 0, \quad ..., \quad \frac{\partial I}{\partial X_n} = 0,$$

que, no es la que nos da la observación, pues esta solución corresponde a valores infinitos de las X, mientras hemos supuestos que la observación nos ha dado valores finitos de las X. El sistema (S) admite, por consiguiente, una solución de valores finitos de las $\frac{\partial I}{\partial X}$, no todos nulos.

Para que esto sea posible es necesario sean satisfechas ciertas condiciones sobre las cuales volveremos en breve. Por el momento las supondremos satisfechas desde que la solución existe. Resolviendo las (S) tendremos los valores de las $\frac{\partial I}{\partial X}$ en el punto $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

En realidad (S) no nos da los valores de las $\frac{\partial I}{\partial X}$, sino solamente las razones que hay entre ellas. Si

$$\frac{\partial I}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial I}{\partial X_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial I}{\partial X_n},$$

son soluciones de (S) aun

$$\rho\frac{\partial I}{\partial X_1}, \quad \rho\frac{\partial I}{\partial X_2}, \quad \ldots, \quad \rho\frac{\partial I}{\partial X_n},$$

donde ρ es arbitrario, serán soluciones de (S). Se observe, empero, que la (3) tiene una integral

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_n) = C,$$

donde C es una constante arbitraria. Si podemos hacer un experimento y encontrar una cantidad m de un bien M que sea indiferente con la combinación $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ podremos tomar como valor de C el índice de m. Si con otro experimento podemos pasar del valor $I(X_1, X_2, \ldots, X_n) = C$ a un valor muy próximo, por ejemplo, $I(X_1 + \Delta X_1, X_2, \ldots, X_n) = C + \Delta C$, podemos tomar como valor aproximado de $\frac{\partial I}{\partial X_1}$ la razón $\frac{\Delta C}{\Delta X_1}$, y, con la ayuda de las soluciones de (S), buscar los valores de las otras $\frac{\partial I}{\partial X}$ en el punto $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pudiendo repetir los experimentos con otras cantidades iniciales, se podrán encontrar los valores de las $\frac{\partial I}{\partial X}$ en otros puutos y, si estos son suficientemente próximos, podremos construir aproximadamente la I.

9. Volvemos ahora a las relaciones entre los coeficientes de las (S) a las cuales hemos aludido en el número precedente Observamos inmediatamente que la solución

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial I}{\partial X_n} = 0.$$

que las (S) admiten siempre, no es extraña al problema. El punto donde las X son infinitas es punto donde hay extremo, y este extremo es cabalmente el máximo absoluto del índice. Si el individuo pudiera llegar a aquel punto no se detendría en ningún otro punto. Si se detiene es porque las condiciones del problema no le permiten llegar al máximo absoluto.

Examinemos ahora cuales son las condiciones a que deben satisfacer las (S) para admitir una solución en la cual todas las $\frac{\partial I}{\partial X}$ son finitas y no todas nulas. La teoría de las ecuaciones lineales nos enseña que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales homogéneas entre n incógnitas ($m > n$) admita una solución en la cual los valores de las incógnitas no sean todos nulos, es que la matriz formada con los coeficientes de las m ecuaciones sea de orden $n-1$, es decir, que se anulen todos los determinantes de orden n contenidos en la matriz.

Observemos, empero, que aun sin desarrollar los determinantes indicados, podemos encontrar en seguida las relaciones necesarias entre los coeficientes de las (S). Efectivamente, si las (S) están satisfechas por valores no nulos de las $\frac{\partial I}{\partial X}$, tendremos :

$$\varphi'_{p,p-s} = \frac{\partial I}{\partial X_{p-s}} : \frac{\partial I}{\partial X_p} \qquad \begin{pmatrix} p = 2, 3, ..., n \\ s = 1, 2, ..., p-1 \end{pmatrix},$$

y, por consiguiente,

$$\varphi'_{p,1} = \frac{\partial I}{\partial X_1} : \frac{\partial I}{\partial X_p}$$

$$\varphi'_{p-s,1} = \frac{\partial I}{\partial X_1} : \frac{\partial I}{\partial X_{p-s}}$$

$$\varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1} = \frac{\partial I}{\partial X_{p-s}} : \frac{\partial I}{\partial X_p},$$

o

$$\varphi'_{p,p-s} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1}. \tag{4}$$

En general, será

$$\varphi'_{p,p-s} = \varphi'_{p,q} : \varphi'_{p-s,q}. \tag{5}$$

Las (5) son superfluas, pues son consecuencias de las (4). Efectivamente de las (4) deducimos

$$\varphi'_{p,q} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{q,1}$$

$$\varphi'_{p-s,q} = \varphi'_{p-s,1} : \varphi'_{q,1},$$

y, por consiguiente,

$$\varphi'_{p,q} : \varphi'_{p-s,q} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1} = \varphi'_{p.p-s}.$$

Las (4) nos dan, pues, las relaciones necesarias y suficientes que deben existir entre los coeficientes de las (S) para que este sistema admita una solución de valores no todos nulos de las $\frac{\partial I}{\partial X}$. Estas relaciones son las mismas que se deducirían formando la matriz de los coeficientes de las (S) y desarrollando los determinantes de orden n. Para no complicar mucho los cálculos supongamos

$$n = 4, \qquad \frac{1}{2} n (n - 1) = 6.$$

El sistema (S) será

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{21}' \frac{\partial I}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{31}' \frac{\partial I}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{41}' \frac{\partial I}{\partial X_4} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_2} - \varphi_{32}' \frac{\partial I}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_2} - \varphi_{42}' \frac{\partial I}{\partial X_4} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_3} - \varphi_{43}' \frac{\partial I}{\partial X_4} = 0.$$

La matriz de los coeficientes es (supuestas verificadas las (4)) :

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & -\varphi_{31}' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varphi_{31}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 0 & 1 & -\varphi_{32}' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\varphi_{42}' \\ 0 & 0 & 1 & -\varphi_{43}' \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -\varphi_{31}' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varphi_{34}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 0 & 1 & -\varphi_{31}' : \varphi_{21}' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\varphi_{41}' : \varphi_{21}' \\ 0 & 0 & 1 & -\varphi_{41}' : \varphi_{31}' \end{array} \right\|$$

multiplicando la cuarta línea por φ_{21}', la quinta también po φ_{21}' y la sexta por φ_{31}', tendremos

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -\varphi_{21}' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varphi_{31}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 0 & -\varphi_{21}' & -\varphi_{31}' & 0 \\ 0 & -\varphi_{21}' & 0 & -\varphi_{41}' \\ 0 & 0 & -\varphi_{31}' & -\varphi_{41}' \end{matrix} \right\|$$

Sumando a la cuarta línea la primera, a la quinta también la primera, y a la sexta la segunda, tendremos

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -\varphi_{21}' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varphi_{31}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 1 & 0 & -\varphi_{31}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \end{matrix} \right\|$$

Restando ahora de la cuarta línea la segunda, y de la quinta y sexta la tercera, tendremos

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -\varphi_{31}' & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varphi_{31}' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\varphi_{41}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

La matriz se reduce así a otra en la que solamente tres filas tienen elementos que no son todos nulos, y, por consiguiente, todos los menores de cuarto orden son nulos. La demostración es general, y puede aplicarse a la matriz de cualquier número de ecuaciones.

Las (4) son en número de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, así que en, realidad, de las $\frac{n(n-1)}{2}$ funciones $\varphi'_{p,p-s}$ solamente serán independientes $n-1$. Se

puede fácilmente ver que todas las $\varphi'_{p,p-s}$ se pueden expresar por medio de las $\varphi'_{p,1}$ $(p=2, 3, ..., n)$ que son precisamente en número $n-1$, y que podrán ser consideradas como las funciones de transformación independientes.

10. Es muy importante examinar el significado económico de las (4). Tácitamente hemos supuesto que las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de un solo valor para un mismo sistema de valores de las variables. A pesar de esto se puede ver que la transformación de un bien en otro se puede hacer de diferentes maneras. En vez de transformar directamente A_{p-s} en A_p, se puede transformar A_{p-s} en A_q, y después transformar A_q en A_p empleando en la segunda transformación la misma cantidad de A_q que se había obtenido con la primera transformación. El signo de las cantidades de A_q que se emplean en las dos transformaciones es distinto, así que como resultado de las dos transtormaciones cambian las cantidades de A_{p-s} y A_p, pero queda sin cambio la cantidad de A_q. Si yo poseo pan y cerca a mi existen individuos que poseen algunos carne, otros vino, etc., si deseo obtener vino en cambio de pan, puedo seguir dos procedimientos distintos. Puedo cambiar mi pan con vino directamente, o puedo cambiar primero mi pan con carne y cambiar la carne con vino. ¿Cuál de las dos operaciones me convendrá más? Si en el mercado rigen las relaciones (4), las dos transformaciones me darán la misma cantidad de vino como vamos a ver con el análisis siguiente :

Dividiremos la exposición en tres casos, para mayor claridad, aun que los tres casos en realidad se reducen a uno solo.

Puede ser

$$p-s<q<p \qquad \text{(A)}$$

$$q<p-s<p \qquad \text{(B)}$$

$$p-s<p<q. \qquad \text{(C)}$$

Caso A : La transformación de A_{p-s} con A_q se representa con

$$dx_{q,p-s}=-\varphi'_{q,p-s}dx_{p-s,q}$$

y la de A_q con A_p con

$$dx_{p,q}=-\varphi'_{p,q}dx_{q,p}.$$

Hemos supuesto que la misma cantidad de A_q que obtenemos con la transformación de A_{p-s} con A_q la volvemos a transformar con A_p, así que será

$$dx_{q,p}+dx_{q,p-e}=0,$$

y por consiguiente,

$$dx_{p,q} = -\varphi'_{p,q}\varphi'_{p,p-s}dx_{p-s,q}.$$

Con la transformación directa de A_{p-s} y A_p habríamos obtenido

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,p-s}dx_{p-s,p}.$$

Si en las dos transformaciones usamos la misma cantidad de A_{p-s}, será

$$dx_{p-s,p} = dx_{p-s,q}$$

y

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,p-s}dx_{p-s,q}.$$

Se ve inmediatamente que $dx_{p,q}$ y $dx_{p,p-s}$ serán iguales, es decir, que el individuo obtendrá la misma cantidad de A_p con las dos transformaciones si está satisfecha la igualdad

$$\varphi'_{p,p-s} = \varphi'_{p,q}\varphi'_{q,p-s}, \qquad (6)$$

mientras las dos transformaciones de A_p serán distintas si la (6) no está satisfecha.

Caso B : La transformación de A_{p-s} con A_q se representa con

$$dx_{q,p-s} = -\frac{dx_{p-s,q}}{\varphi'_{p-s,q}}$$

y la de A_q con A_p con

$$dx_{p,q} = -\varphi'_{p,q}dx_{q,p},$$

y puesto que

$$dx_{q,p-s} + dx_{q,p} = 0,$$

será

$$dx_{p,q} = -\frac{\varphi'_{p,q}}{\varphi'_{p-s,q}}dx_{p-s,q}.$$

La transformación directa de A_{p-s} con A_p daría

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,p-s}dx_{p-s,p},$$

y siendo, por hipótesis,

$$dx_{p-s,p} = dx_{p-s,q},$$

será

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,p-s}dx_{p-s,q},$$

y será

$$dx_{p,p-s} = dx_{p,q},$$

si está satisfecha la

$$\varphi'_{p.p-s} = \frac{\varphi'_{p.q}}{\varphi'_{p-s.q}}, \qquad (7)$$

mientras serán distintos $dx_{p.p-s}$ y $dx_{p,q}$ si la (7) no está satisfecha.

Caso C : La transformación de A_{p-s} con A_q da

$$dx_{q.p-s} = -\varphi'_{q,p-s} dx_{p-s,q},$$

y la de A_q con A_p

$$dx_{p,q} = -\frac{dx_{q,p}}{\varphi'_{q.p}},$$

y puesto que

$$dx_{q,p} + dx_{q,p-s} = 0,$$

tendremos

$$dx_{p,q} = -\frac{\varphi'_{q,p-s}}{\varphi'_{q.q}} dx_{p-s,q}.$$

La transformación directa de A_{p-s} con A_p daría

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p.p-s} dx_{p-s,p},$$

y siendo

$$dx_{p-s\,q} = dx_{p-s,p},$$

será

$$dx_{p.q} = dx_{p,p-s},$$

si está satisfecha la igualdad

$$\varphi'_{p.p-s} = \frac{\varphi'_{q.p-s}}{\varphi'_{q.p}}, \qquad (8)$$

mientras no serán iguales $dx_{p,q}$ y $dx_{p,p-s}$ si no está satisfecha la (8).

Vamos ahora a examinar lo que sucede cuando un individuo puede efectuar la transformación de un bien con otro por distintos caminos, dos, por ejemplo. Indicamos las dos leyes de transformaciones, en un momento dado, con

$$dx_{p,p-s} + \alpha dx_{p-s,p} = 0$$

$$dx_{o.p-s} + \beta dx_{p-s,p} = 0,$$

donde $\alpha \neq \beta$ y, para fijar las ideas, $\alpha < \beta$.

Si el individuo cede $dx_{p.p-s}$ siguiendo el primer camino adquiere $dx_{p-s,p}$ dado por

$$-dx_{p,p-s} = \alpha dx_{p-s,p},$$

y si ahora cede la cantidad $dx_{p-s,p}$, que ha adquirido siguiendo el segundo camino de transformación con A_p, adquirirá una cantidad de A_p dada por

$$dx'_{p,p-s} = -\beta dx_{p-s,p},$$

y siendo

$$dx_{p-s,p} = -\frac{1}{\alpha} dx_{p,p-s},$$

será

$$dx'_{p-s,p} = \frac{\beta}{\alpha} dx_{p,p-s}.$$

Si $\alpha < \beta$ es $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ y, por consiguiente, el individuo obtiene con las dos transformaciones una cantidad $dx'_{p,p-s}$ de A_p mayor de la cantidad $dx_{p,p-s}$ de A_p que había cedido, sin variar las cantidades de los demás bienes. El individuo puede continuar estas transformaciones hasta que subsisten los dos caminos de transformación, y puede llegar al punto en el cual todas las X_p son infinitas, o mejor, en el cual tiene la saciedad de todos los bienes. Si las cantidades de bienes fueran limitadas y fueran M_1, M_2, ..., M_n, las cantidades máximas de cada bien el individuo podría llegar al máximo índice dado por

$$I(M_1, M_2, ..., M_n).$$

Cuando, las igualdades (6), (7), (8) no están satisfechas, el individuo se encontrará precisamente en el caso de poder seguir distintos caminos en sus transformaciones de bienes dos a dos. En este caso podría llegar al máximo absoluto del índice. Ahora si las igualdades (6), (7), (8) están satisfechas, en todo el campo de las transformaciones, el individuo no tendrá más que un camino para las transformaciones, pues, cualquiera que sea el que siga, los resultados finales no cambian. Vamos a demostrar que si las (4) están satisfechas, lo estarán también las (6), (7), (8).

A) De las (4) deducimos :

$$\varphi'_{p,q} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{q,1}, \qquad \varphi'_{q,p-s} = \varphi'_{q,1} : \varphi'_{p-s,1},$$

y en consecuencia,

$$\varphi'_{p,q}\varphi'_{q,p-s} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1} = \varphi'_{p,p-s}.$$

B) Por la (4) será

$$\varphi'_{p,q} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{q,1}, \qquad \varphi'_{p-s,q} = \varphi'_{p-s,1} : \varphi'_{q,1},$$

y

$$\varphi'_{p,q} : \varphi'_{p-s,q} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1} = \varphi'_{p,p-s}.$$

C) De las (4) tenemos :

$$\varphi'_{q,p-s} = \varphi'_{q,1} : \varphi'_{p-s,1}, \qquad \varphi'_{q,p} = \varphi'_{q,1} : \varphi'_{p,1},$$

y será, pues,

$$\varphi'_{q,p-s} : \varphi'_{q,p} = \varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1} = \varphi'_{p,p-s}.$$

Así que si las (4) están satisfechas, el individuo no podrá llegar al máximo absoluto del índice, y para aumentar la cantidad de uno de los bienes tendrá que diminuir la cantidad de otro bien. No podrá, pues, llegar más que a un punto de máximo relativo.

11. Las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de las variables independientes, sus valores cambian en general cuando cambian los valores de las variables. En el análisis que precede los valores de las $\varphi'_{p,p-s}$ que se toman en cuenta, son los que ellas tienen en el punto solución. Así que en rigor la existencia de las (4) podría considerarse necesaria solamente en el punto solución. Desde el punto de vista matemático ésto puede aceptarse, no, empero, desde el punto de vista económico. Si solamente en el punto solución existieran las (4) y aunque en aquel punto hubiera un máximo del índice, al individuo le convendría superar aquel punto, aunque momentáneamente su índice disminuyera, para después pasar a un campo donde le sería posible llegar al máximo absoluto. Debemos, pues, admitir que las (4) o no se verifican en ningún punto, o se verifican en todo el campo de transformación. La existencia de las (4) en puntos aislados produce las mismas consecuencias que la no existencia de ellas.

Cuando las (4) no existen ya sabemos cual será el resultado de las transformaciones del individuo. Adquirirá la cantidad máxima posible de cada bien, llegando al máximo absoluto compatible con las condiciones iniciales del problema. Si en vez las (4) existen en todo el campo de transformación, son necesarias otras investigaciones para llegar a un completo conocimiento del resultado.

En el concreto económico, en la forma habitual de las transformaciones, cuando se suponen operadas en intervalos breves de tiempo, las (4) existen siempre, y ésto debido a que los bienes en general no se cambian directamente entre ellos. En los cambios de bienes interviene siempre un bien especial, *la moneda,* que estudiaremos más

adelante, y esto no solamente en el simple cambio, pero también en la mayor parte de los varios casos de la producción. Si A_{p-s} y A_p se pueden cambiar solamente por intermedio de A_1 será :

$$dx_{p,1} = -\varphi'_{p,1} dx_{1,p}, \qquad dx_{p-s,1} = -\varphi'_{p-s,1} dx_{1,p-s}.$$

Y si el individuo transforma A_p en A_1 y A_1 en A_{p-s} con el único objeto de efectuar la transformación de A_p en A_{p-s}, que le es imposible efectuar directamente, será

$$dx_{p,1} = dx_{p,p-s}, \qquad dx_{p-s,1} = dx_{p-s,p},$$

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,1} dx_{1,p}, \qquad dx_{p-s,p} = -\varphi'_{p-s,1} dx_{1,p-s},$$

y, por consiguiente,

$$dx_{p,p-s} = -\frac{\varphi'_{p,1}}{\varphi'_{p-s,1}} dx_{p-s,p}.$$

Es decir, que la $\varphi'_{p,p-s}$ que da la ley de transformación de A_{p-s} en A_p es representada por $\varphi'_{p,1} : \varphi'_{p-s,1}$: las (4) están satisfechas.

No sucede lo mismo cuando las transformaciones se hacen en épocas suficientemente distantes una de otra. Aun que las transformaciones se hagan siempre por intermedio del bien A_1, puede suceder que la ley de transformación de A_1 con A_{p-s} y A_p varíe con el tiempo. De esto aprovecha el especulador cambiando primero moneda por otro bien y, en momento oportuno, este bien con moneda obteniendo una cantidad mayor de moneda de la que había primitivamente empleado.

12. Para examinar más íntimamente las transformaciones individuales de bienes, vamos a tratar con alguna extensión el caso más sencillo, aquel en que el individuo se encuentra en presencia de dos bienes solamente. Este examen es importante, pues estudia la transformación elemental, a la cual pueden ser reducidos muchos fenómenos económicos, sin contar que toda transformación, por compleja que sea, puede reducirse siempre a un conjunto de transformaciones elementales de dos bienes.

El individuo esté en presencia de dos bienes A_1, A_2, y sean a_1, a_2 las cantidades iniciales que posee respectivamente de cada bien, pudiendo una de ellas ser nula. Al final de la transformación las cantidades de A_1, A_2 poseídas por el individuo, serán :

$$X_1 = a_1 + x_{12}, \qquad X_2 = a_2 + x_{21}.$$

El sistema (T) se reduce a la ecuación

$$x_{21} + \varphi_{21}(x_{12}) = 0,$$

y el sistema (S) a

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{21}' \frac{\partial I}{\partial X_2} = 0.$$

En este caso será :

$$\varphi_{21}' = \frac{dx_{21}}{dx_{12}} = \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}.$$

Si el individuo puede llegar a un punto de índice máximo, este será dado por

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} x_{21} + \varphi_{21}(x_{12}) = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{21}' \dfrac{\partial I}{\partial X_2} = 0. \end{array} \right.$$

La solución de (A) no corresponde siempre a un máximo de I, pudiendo corresponder también a un mínimo o a un punto donde no hay extremo. Tenemos :

$$d^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} dX_1^2 + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} dX_1 dX_2 + \\ + \frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2} dX_2^2 + \frac{\partial I}{\partial X_1} d^2X_1 + \frac{\partial I}{\partial X_2} d^2X_2,$$

y siendo

$$dX_1 = dx_{12}, \qquad dX_2 = dx_{21} = -\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} dx_{12},$$

$$dX_1^2 = dx_{12}^2, \qquad d^2X_1 = d^2x_{12} = 0,$$

$$d^2X_2 = \frac{d^2\varphi_{21}}{dx^2_{12}} dx^2_{12}, \qquad dX_1 dX_2 = -\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} dx^2_{12}, \qquad dX_2^2 = \left(\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right)^2 dx^2_{12},$$

será

$$d^2 I = \left[\frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} - 2 \frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} + \frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2} \left(\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right)^2 + \frac{\partial I}{\partial X_2} \frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{12}^2}\right] d^2x_{12}.$$

Es imposible, en general, *a priori,* conocer el signo de d^2I, pues tanto $\frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{12}^2}$ como $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2}$ pueden ser positivos o negativos. A más de la solución de (A), pueden existir soluciones incompletas determinadas por las limitaciones del problema. Vamos a proceder a una dis-

cusión general que dividiremos en varios casos según el signo de d^2I. Se supone que al rededor del individuo existen cantidades suficientes de bienes, para que el pueda llegar a las soluciones que encontraremos posibles.

13. *Primer caso :* $d^2I < 0$ en todo el intervalo donde es posible la transformación.

La solución de (A) da un máximo del índice. Esta convendrá al problema si la x que se presenta con signo negativo en la solución, tiene un valor absoluto comprendido entre cero y el valor de la a inicial que corresponde a la x. En este caso tendremos una solución completa.

Cuando el problema tiene una solución completa se puede demostrar que tendrá una sola. En efecto, si suponemos que las (A) tenga dos soluciones, las dos deben corresponder a un máximo del índice, que, por la primera ecuación de (A) puede ser considerada como función de la sola variable independiente x_{12}. A los dos valores máximos del índice dados por las (A) corresponderán dos valores distintos de x_{12}, pues hemos supuesto que (A) tenía dos soluciones distintas. Entonces entre estos dos valores de x_{12} debería haber un tercer valor de x_{12} que debería corresponder a un mínimo del índice, pues es sabido que una función de una variable no puede tener dos puntos consecutivos de máximo. Entre dos puntos de máximo debe existir un punto de mínimo. Puesto que dI se anula aun cuando I pasa por un mínimo el valor de x_{12} que corresponde a este mínimo, será también solución de (A). Ninguna solución de (A) empero, puede corresponder a un mínimo porque hemos supuesto d^2I siempre negativo, así que (A) no puede tener más de una solución.

De las dos cantidades x_{12} y x_{21} una será cedida y la otra adquirida, debemos ahora precisamente determinar el signo de x_{12} y x_{21}.

Cuando x_{12} es cedida, tendremos

$$X_1 = a_1 - x_{12}, \qquad X_2 = a_2 + x_{21}.$$

Puesto que I podemos considerarlo como función de la sola x_{12}, tendremos

$$\frac{dI}{dx_{12}} = \frac{\partial I}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx_{12}} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dx_{12}},$$

y siendo

$$\frac{dX_1}{dx_{12}} = -1, \qquad \frac{dX_2}{dx_{12}} = \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}},$$

será

$$\frac{dI}{dx_{12}} = -\frac{\partial I}{\partial X_1} + \varphi_{21}'(x_{12})\frac{\partial I}{\partial X_2}.$$

Habiendo supuesto que $d^2I < 0$, será siempre $\frac{d^2I}{dx_{12}^2} < 0$, y, por consiguiente, $\frac{dI}{dx_{12}}$ será función decreciente de x_{12}. Cuando $x_{12} = 0$ $\frac{dI}{dx_{12}}$ tomará su valor máximo dado por

$$\left(\frac{dI}{dx_{12}}\right)_{x_{12}=0} = -\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} + \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}.$$

Si este valor es negativo o nulo, es decir, si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} \geq \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}.$$

$\frac{dI}{dx_{12}}$ se conservará siempre negativo para todos los valores de x_{12} mayores de cero. I será, por consiguiente, una función que decrece a medida que x_{12} crece y al individuo no le convendrá ceder cantidad alguna de A_1, pues con esto disminuiría su índice.

Si en vez

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} < \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}$$

$\left(\frac{dI}{dx_{12}}\right)_{x_{12}=0}$ será positiva. Aumentando x_{12} el valor de $\frac{dI}{dx_{12}}$ va disminuyendo, pero se conservará positivo hasta un cierto valor de x_{12} donde será nulo y que es precisamente el que da la solución de las (A). Al individuo le convendrá ceder x_{12} en cambio de x_{21} porque su índice irá creciendo con x_{12}.

Si el individuo cede x_{21}, tendremos

$$X_1 = a_1 + x_{12}, \qquad X_2 = a_2 - x_{21},$$

y

$$\frac{dI}{dx_{12}} = \frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{21}'(x_{12})\frac{\partial I}{\partial X_2}.$$

Con el mismo razonamiento hecho encontraremos que si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} \leq \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}$$

no le convendrá al individuo ceder cantidad alguna de A_2 mientras si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} > \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}$$

le conviene al individuo ceder x_{21} en cambio de x_{12}.

Si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} = \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}$$

al individuo no le conviene ninguna transformación. En este caso la solución de (A) es

$$x_{12}=0, \qquad x_{21}=0.$$

Exceptuando este caso, al individuo le convendrá siempre una transformación en un sentido o en el otro (ceder A_1 o ceder A_2) si

$$a_1>0, \qquad a_2>0.$$

14. Si una de las dos cantidades a_1, a_2 es nula, puede haber otros casos de imposibilidad de transformaciones, porque éstas no convienen al individuo.

Si $a_1=0$ y

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=0} > \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2},$$

la transformación es posible, pues al individuo le conviene transformar una cantidad de A_2 en una cantidad de A_1. Si empero es

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=0} \leq \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2},$$

la transformación es imposible, pues al individuo le convendría ceder una cantidad de A_1 en cambio de una de A_2 para aumentar su índice, lo que no podrá hacer por ser $a_1=0$.

Semejantemente, si $a_2=0$ la transformación será posible si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} < \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=0},$$

mientras será imposible si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} \geq \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=0}.$$

Cuando la transformación es posible, puede ser completa, es decir, coincidir con la solución de (A), o puede ser incompleta, es decir, el individuo no puede llegar a la solución de (A).

Sea

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} < \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a}.$$

En este caso sabemos que será cedido A_1. El individuo, empero, no puede ceder una cantidad de A_1 mayor de a_1. Ahora si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=0} = \varphi_{21}'(a_1)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2+\varphi_{21}(a_1)}$$

la solución de (A) será

$$x_{12}=a_1, \qquad x_{21}=\varphi_{21}(a_1),$$

es decir, que el individuo cederá toda la cantidad inicial a_1 de A_1 y la solución será completa. Si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=0} < \varphi_{21}'(a_1)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2+\varphi_{21}(a_1)}$$

$\frac{dI}{dx_{12}}$ se conservará positivo para todos los valores de $x_{12} \leq a_1$ y el índice irá creciendo con x_{12}. En este caso también al individuo le convendrá ceder toda la cantidad a_1; la transformación, empero, de toda la a_1 no corresponderá a una solución de (A). En este caso tendremos una solución incompleta.

Así, también, si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1} > \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=a_2}$$

es A_2 que viene cedido. Indicaremos con x_{12}' el valor de x_{12} que corresponde al valor a_2 de x_{21}. Si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1+x_{12}'} = \varphi_{21}'(x_{12}')\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=0},$$

la solución de (A) será

$$x_{12}=x_{12}', \qquad x_{21}=a_2.$$

Es decir, se transformará toda la cantidad a_2 de A_2 y la solución será completa. Si, empero, es

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=a_1+x_{12}'} > \varphi_{21}'(x_{12}')\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2=0},$$

la solución será también

$$x_{12} = x_{12}', \qquad x_{21} = a_2,$$

pero en este caso será incompleta, no correspondiendo a una solución de (A).

15. Resumiendo veremos que :

1° Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, una transformación es siempre posible si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = a_1} \neq \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = a_2}.$$

Para que la solución sea completa, deberá ser simultáneamente

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = a_1} < \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = a_2} \\ &\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = 0} \geq \varphi_{21}'(a_1)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = a_2 + \varphi_{21}(a_1)} \end{aligned}\right. \qquad \text{(B)}$$

y x_{12} será cedido y x_{21} adquirido. O también deberá ser simultáneamente

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = a_1} > \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = a_2} \\ &\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = a_1 + x_{12}'} \leq \varphi_{21}'(a_1)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = 0} \end{aligned}\right. \qquad \text{(C)}$$

y será x_{12} adquirido y x_{21} cedido.

2° Si $a_1 = 0$, la transformación será posible si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = 0} > \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = a_2} \qquad \text{(D)}$$

y será completa si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = x_{12}'} \geq \varphi_{21}'(x_{12}')\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = 0}. \qquad \text{(E)}$$

3° Si $a_2 = 0$, la transformación será posible si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = a_1} < \varphi_{21}'(0)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = 0} \qquad \text{(F)}$$

y será completa si

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1 = 0} \geq \varphi_{21}'(a_1)\left(\frac{\partial I}{\partial X_2}\right)_{X_2 = \varphi_{21}(a_1)}. \qquad \text{(G)}$$

15. Para conocer el signo de d^2I en todo el intervalo donde es posible la transformación, sería necesario conocer los valores de I y φ_{21}. Cuando I y φ_{21} son tales que para cualquier valor de x_{12} y su correspondiente valor de x_{21} es

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} > 0, \qquad \frac{d^2\varphi_{21}}{dx^2_{12}} \leq 0,$$

será siempre $d^2I < 0$ pues, siendo $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2}\frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2}$, siempre negativos, y $\frac{\partial I}{\partial X_1}\frac{\partial I}{\partial X_2}$, siempre positivos, en este caso, d^2I será una suma de términos todos negativos.

Si

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{21}^2} > 0$$

no se puede decir, *a priori*, cual será el signo de d^2I.

Si es siempre

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} = 0,$$

los bienes son independientes. Tendremos entonces

$$I(X_1, X_2) = I_1(X_1) + I_2(X_2)$$

y el sistema (A) se vuelve

$$\begin{cases} x_{21} + \varphi_{21}(x_{21}) = 0 \\ I_1'(X_1) - I_2'(X_2)\,\varphi_{21}'(x_{12}) = 0. \end{cases} \qquad (A')$$

Será, en este caso,

$$d^2I = \left[I_1''(X_1) + I_2''(X_2)\left(\frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{21}^2}\right) + I_2'(X^2)\frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{12}^2}\right] dx_{12}^2.$$

Si es siempre $\frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{12}^2} \leq 0$, será siempre también $d^2I < 0$, y en este caso, suando $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, la solución será completa si es simultáneamente

$$\begin{cases} I_1'(a_1) < \varphi_{21}'(0)\, I_2'(a_2) \\ I_1'(0 \geq \varphi_{21}'(a_1)\, I_2'[a_2 + \varphi_{21}(a_1)], \end{cases} \qquad (B')$$

siendo cedida la x_{12}.

Será también completa la solución si

$$\begin{cases} I_1'(a_1) > \varphi_{21}'(0)\, I_2'(a_2') \\ I_1'(a_1 + x_{12}') \leq \varphi_{21}'(x_{12})\, I_2(0), \end{cases} \qquad (C')$$

siendo cedida la x_{21}.

No será posible ninguna transformación si

$$I_1'(a_1) = \varphi_{21}'(0)\, I_2'(a_2).$$

Si $a_1 = 0$, la transformación será posible si

$$I_1'(0) > \varphi_{21}'(0)\, I_2'(a_2), \qquad (D')$$

y la solución será completa si

$$I_1'(x_{12}') \leq \varphi_{21}'(x_{12}')\, I_2'(0). \qquad (E')$$

Si $a_2 = 0$, la transformación será posible si

$$I_1'(a_1) < \varphi_{21}'(0)\, I_2'(0), \qquad (F')$$

y la solución será completa si

$$I_1'(0) \geq \varphi_{21}'(a_1)\, I_2'[\varphi_{21}(a_1)]. \qquad (G')$$

16. Cuando los bienes son independientes y $\frac{d^2\varphi_{21}}{dx_{12}^2} = 0$, es decir, $\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} = m_{21}$ (constante), d^2I será siempre negativo. El sistema (A) se vuelve

$$\begin{cases} x_{21} + m_{21}x_{12} = 0 \\ I_1'(X_1) - m_{21}I_2'(X_2) = 0. \end{cases} \qquad (A'')$$

Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, la transformación será posible si

$$I_1'(a_1) \neq m_{21}I_2'(a_2). \qquad (B'')$$

Si

$$I_1'(a_1) < m_{21}I_2'(a_2), \qquad (C'')$$

será cedido x_{12} y la solución será completa si

$$I_1'(0) \geq m_{21}I_2'(a_2 + m_{21}a_1). \qquad (D'')$$

Si en vez

$$I_1'(a_1) > m_{21}I_2'(a_2), \qquad (E'')$$

será cedido x_{21} y la solución será completa si

$$I_1'\left(a_1 + \frac{a_2}{m_{21}}\right) \leq m_{21} I_2'(0). \qquad (F'')$$

17. Hemos admitido, que, cuando un individuo efectúa una transformación de bienes, el índice de la combinación resultante es mayor del índice de la combinación inicial. Llamaremos *ganancia* del individuo el aumento de índice que obtiene con la transformación. Si indicamos con g la ganancia $(a_1, a_2, ..., a_n)$ la combinación inicial, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ la combinación final será

$$g = I(X_1, X_2, ..., X_n) - I(a_1, a_2, ..., a_n),$$

y para el caso de dos bienes

$$g = I(X_1, X_2) - I(a_1, r_2). \qquad (9)$$

La ganancia g es función de a_1, a_2, X_1, X_2. En el caso que hemos supuesto, $d^2I < 0$, el individuo se detiene, en sus transformaciones en una combinación (X_1, X_2) de máximo índice y que es la que es unívocamente determinada por la solución de (A) o por una de las soluciones incompletas que ya hemos indicado. En estos casos si las cantidades a_1, a_2 son dadas, y es dada también la ley de transformación, las cantidades X_1, X_2 serán únivocamente determinadas y pueden ser consideradas pues, como funciones de a_1, a_2. La ganancia g será, pues, función de las cantidades a_1, a_2 y variará cuando varían estas dos cantidades.

Supongamos que a_1, a_2 tomen las variaciones infinitesimales δa_1, δa_2, quedando invariada la ley de transformación. La solución de (A) variará también, y si x_{12}, x_{21} son los valores que se deducen de las (A) cuando las cantidades iniciales de los bienes eran a_1, a_2, cuando estas cantidades iniciales son $a_1 + \delta a_1$, $a_2 + \delta a_2$ las soluciones de (A) serán $x_{12} + \delta x_{12}$, $x_{21} + \delta x_{21}$. Semejantemente las cantidades finales de bienes en vez de $X_1 X_2$ serán $X_1 + \delta X_1$, $X_2 + \delta X_2$. Ya que hemos supuesto que la ley de transformación ha quedado invariada será

$$\delta x_{21} - \varphi_{21}'(x_{12})\, \delta x_{12} = 0.$$

Volvemos a la igualdad (9) que suponemos corresponde a un individuo que ha llegado, desde la combinación inicial (a_1, a_2), a la combinación de máximo índice (X_1, X_2) que, por el momento suponemos dada

por una solución completa, es decir, corresponde a una solución de las (A). Si en la (9) hacemos variar las a_1, a_2, tendremos :

$$\delta g = \frac{\partial I}{\partial X_1} \delta X_1 + \frac{\partial I}{\partial X_2} \delta X_2 - \frac{\partial I}{\partial a_1} \delta a_1 - \frac{\partial I}{\partial a_2} \delta a_2,$$

o, siendo

$$\delta X_1 = \delta a_1 + \delta x_{12} \qquad \delta X_2 = \delta a_2 + \delta x_{21} = \delta a_2 - \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} \delta x_{12},$$

tendremos

$$\delta g = \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial a_1}\right] \delta a_1 + \left[\frac{\partial I}{\partial X_2} - \frac{\partial I}{\partial a_2}\right] \delta a_2 + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial X_2} \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right] \delta x_{12},$$

o, por la segunda ecuación de (A)

$$\delta g = \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial a_1}\right] \delta a_1 + \left[\frac{\partial I}{\partial X_2} - \frac{\partial I}{\partial a_2}\right] \delta a_2.$$

Si $f(x, y)$ es función de x, y, en general, será :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

así que podremos escribir

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} = \frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial a_1}, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} = \frac{\partial I}{\partial X_2} - \frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

Habríamos podido obtener el mismo resultado variando en la (9) primero la a_1, dejando constante la a_2 y después la a_2 dejando constante a_1.

Aplicando la fórmula de Taylor tendremos :

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} = (X_1 - a_1) \frac{\partial^2 I}{\partial X_1'^2} + (X_2 - a_2) \frac{\partial^2 I}{\partial X_1' \partial X_2'},$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_2} = (X_1 - a_1) \frac{\partial^2 I}{\partial X_1' \partial X_2'} + (X_2 - a_2) \frac{\partial^2 I}{\partial X_2'^2},$$

donde, como es sabido,

$$X_1' = a_1 + \theta_1 (X_1 - a_1), \qquad X_2' = a_2 + \theta_2 (X_2 - a_2),$$

siendo θ_1, θ_2 dos números menores de la unidad.

Sea

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} > 0$$

para todos los valores de X_1, X_2. Si x_{12} es cedido, tendremos

$$X_1 - a_1 < 0, \qquad X_2 - a_2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1'^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial X_1' \partial X_2'} > 0, \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial X_2'^2} < 0,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} > 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} < 0,$$

es decir, *la ganancia crece cuando crece la cantidad inicial del bien cedido, y la ganancia disminuye cuando crece la cantidad inicial del bien adquirido.*

Si x_{21} es cedido, será

$$X_1 - a_1 > 0, \qquad X_2 - a_2 < 0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1'^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial X_1' \partial X_2'^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial X_2'^2} < 0,$$

y, pues,

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} < 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} > 0,$$

resultado que concuerda con el precedente.

Si queda constante la cantidad inicial del bien cedido (supongamos sea a_1 de A_1) y varía la cantidad inicial del bien adquirido (a_2 de A_2), g tiene su valor máximo cuando a_2 es nulo y va disminuyendo a medida que a_2 crece. Puesto que X_1 es cedido será, como hemos visto,

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} < \varphi_{21}'(0) \frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

Si a_2 crece, y a_1 se mantiene constante el producto $\varphi_{21}'(0) \frac{\partial I}{\partial a_2}$ decrece mientras $\frac{\partial I}{\partial a_1}$ crece por la hipótesis $\frac{\partial^2 I}{\partial a_1 \partial a_2} > 0$. Creciendo a_2 llegaremos a un punto donde

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \varphi_{21}'(0) \frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

En este punto tendremos el mínimo de g (cero). Será, pues, imposible toda transformación. Creciendo a_2 y si el individuo siguiera cediendo A_1 por A_2, g se volvería negativo, es decir, el individuo tendría una pérdida, pero esto es imposible, pues no admitimos en la

teoría que un individuo opere para perder. En realidad, la transformación cambiará de sentido, es decir, el individuo cederá A_2 para adquirir A_1. Conforme al principio enunciado arriba, su ganancia irá aumentando, en esta nueva transformación, a medida que crece a_2 y llegará a su máximo cuando a_2 es infinita.

Si para todo valor de X_1, X_2, se tiene :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} = 0,$$

será

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} = (X_1 - a_1)\frac{\partial^2 I}{\partial X_1'^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} = (X_2 - a_2)\frac{\partial^2 I}{\partial X_2'^2},$$

y tendremos un resultado igual al precedente.

Si, en vez, es siempre

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_1} < 0,$$

el signo de $\frac{\partial g}{\partial a_1}\frac{\partial g}{\partial a_2}$ no puede ser determinado *a priori*.

18. Cuando varían a_1, a_2 varía tambien x_{12} solución de (A). Sea x_{12} cedida. Tendremos :

$$\frac{dI}{dx_{12}} = -\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}} = 0.$$

Variando a_1, a_2, ya que $\frac{dI}{dx_{12}}$ debe conservarse nulo, tendremos :

$$\frac{\partial}{\partial x_{12}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta x_{12} + \frac{\partial}{\partial x_{21}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta x_{21} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial a_1}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_2 = 0. \quad (\alpha)$$

Ahora, sabemos que

$$\frac{dx_{21}}{dx_{12}} = -\varphi_{21}'(x_{12}),$$

y si F es una función de x_{12} y x_{21} será :

$$\frac{dF}{dx_{12}} = \frac{\partial F}{\partial x_{12}} - \varphi_{21}'(x_{12})\frac{\partial F}{\partial x_{21}}.$$

Tenemos, pues,

$$\frac{d^2 I}{dx_{12}^2} = \frac{\partial}{\partial x_{12}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right] - \varphi_{21}'(x_{12})\frac{\partial}{\partial x_{21}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right],$$

y, siendo,

$$\delta x_{21} + \varphi_{21}'(x_{12})\,\delta x_{12} = 0,$$

será

$$\frac{d^2 I}{dx_{12}^2}\delta x_{12} = \frac{\partial}{\partial x_{12}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta x_{12} + \frac{\partial}{\partial x_{21}}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta x_{21},$$

y, por la (α),

$$\frac{d^2 I}{dx_{12}^2}\delta x_{12} + \frac{\partial}{\partial a_1}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\left[-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_2 = 0.$$

Observando que

$$\frac{\partial X_1}{\partial a_1} = 1, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial a_2} = 1,$$

tendremos

$$\frac{d^2 I}{dx_{12}^2}\delta x_{12} + \left[-\frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_1 +$$
$$+ \left[-\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]\delta a_2 = 0,$$

y, observamos que

$$\delta x_{12} = \frac{\partial x_{12}}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial x_{12}}{\partial a_2}\delta a_2,$$

será

$$\frac{\delta x_{12}}{\delta a_1} = \frac{1}{\dfrac{d^2 I}{dx_{12}^2}}\left[\frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right]$$

$$\frac{\delta x_{12}}{\delta a_2} = \frac{1}{\dfrac{d^2 I}{dx_{12}^2}}\left[\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2}\frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right].$$

Siendo, por hipótesis, siempre $\dfrac{d^2 I}{dx_{12}^2} < 0$, si $\dfrac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} > 0$, será :

$$\frac{\delta x_{12}}{\delta a_1} > 0, \qquad \frac{\delta x_{12}}{\delta a_2} < 0,$$

pero si

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} < 0,$$

los signos de $\frac{\partial x_{12}}{\partial a_1}$, $\frac{\partial x_{12}}{\partial a_2}$, no podrán determinarse *a priori.*

En la investigación que precede se ha supuesto x_{12} cedido. Si en vez fuera x_{21} cedido tendríamos :

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial a_1} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 I}{\partial x_{12}^2}} \left[\frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right],$$

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial a_2} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 I}{\partial x_{12}^2}} \left[\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 I}{\partial X_2^2} \frac{d\varphi_{21}}{dx_{12}}\right],$$

y si

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \geq 0,$$

será

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial a_1} < 0, \qquad \frac{\partial x_{12}}{\partial a_2} > 0,$$

resultado que concuerda con el anterior, como podíamos prever, pues x_{12} y x_{21} crecen y decrecen juntos.

Aun en este caso si $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} < 0$ no podrán determinarse, *a priori,* los signos de $\frac{\partial x_{12}}{\partial a_1}$ y $\frac{\partial x_{12}}{\partial a_2}$.

19. El razonamiento que precede no vale cuando el máximo del índice es dado por una solución incompleta.

En este caso se transforma o toda la cantidad a_1 o toda la cantidad a_2. Sea A_1 el bien cedido. En este caso se transforma toda la a_1. La ganancia será

$$g = I(X_1, X_2) - I(a_1, a_2),$$

donde será

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = a_2 + \varphi_{21}(a_1) = a_2'.$$

Variamos a_1, a_2 suponiendo que la solución siempre quede incompleta, es decir, siguen siempre los valores indicados de X_1, X_2. La variación de la ganancia será :

$$\partial g = \frac{\partial I}{\partial a_2'} \partial a_2' - \frac{\partial I}{\partial a_1} \partial a_1 - \frac{\partial I}{\partial a_2} \partial a_2.$$

y siendo

$$\partial a_2' = \partial a_2 + \varphi_{21}'(a_1)\,\partial a_1,$$

tendremos

$$\partial g = \left[\frac{\partial I}{\partial a_2'}\varphi_{21}'(a_1) - \frac{\partial I}{\partial a_1}\right]\partial a_1 + \left[\frac{\partial I}{\partial a_2'} - \frac{\partial I}{\partial a_2}\right]\partial a_2.$$

Aquí también hay que tomar en consideración el signo de $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2}$.

Si $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \geq 0$, ya hemos demostrado en el número 17 que siendo

$$X_1 < a_1, \qquad X_2 > a_2,$$

será

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial a_1} > 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial X_2} - \frac{\partial I}{\partial a_2} < 0.$$

Ahora, habiendo supuesto la solución incompleta será

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{X_1=0} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'},$$

y siendo

$$\left(\frac{\partial I}{\partial X_1}\right)_{x_1=0} > \frac{\partial I}{\partial a_1},$$

a fortiori, será

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'}.$$

Tendremos, pues,

$$\frac{\partial g}{\partial a_2} = \frac{\partial I}{\partial a_2'}\varphi_{21}'(a_1) - \frac{\partial I}{\partial a_1} > 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} = \frac{\partial I}{\partial a_2'} - \frac{\partial I}{\partial a_2} < 0,$$

como en el caso de la solución completa.

Si en vez $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} < 0$ no se puede establecer nada *a priori* sobre el signo de $\frac{\partial g}{\partial a_1}, \frac{\partial g}{\partial a_2}$.

El caso de X_2 cedido de los mismos resultados como se puede fácilmente verificar.

Con la variación de las constantes a_1, a_2, la solución de incompleta puede volverse completa. En este caso se vuelve a aplicar el análisis de los números 17 y 18.

20. Estudiaremos ahora èl segundo caso donde $d^2 I > 0$ en todo el intervalo donde es posible la transformación.

En la misma forma que hemos visto en el primer caso, se puede demostrar también en esto que si (A) tiene una solución, tiene una sola. Esta solución corresponderá siempre a un mínimo del índice, es decir, el individuo puede, transformando sus bienes, llegar a infinitas combinaciones que den un índice mayor de el que corresponde a la combinación, solución de (A). Así que esta solución de (A) no será nunca solución del problema. Si existe una combinación de máximo índice posible para el individuo, será dada por una solución incompleta.

Para simplificar las fórmulas, indicaremos con x_{12}' el valor de x_{12} que corresponde a a_2, es decir, en valores absolutos, será

$$a_2 = \varphi_{21}(x_{12}'),$$

y semejantemente, haremo

$$a_1' = a_1 + x_{12}', \qquad a_2' = a_2 + \varphi_{21}(a_1).$$

En general, tendremos

$$\frac{dI}{dx_{12}} = \frac{\partial I}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx_{12}} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dx_{21}}\frac{d\varphi_{12}}{dx_{12}}.$$

Si A_1 es cedido, tendremos

$$\frac{dI}{dx_{12}} = -\frac{\partial I}{\partial X_1} + \frac{\partial I}{\partial X_2}\varphi_{21}'(a_{12}),$$

y si en cambio es cedido A_2, será

$$\frac{dI}{dx_{12}} = \frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{\partial I}{\partial X_2}\varphi_{21}'(x_{12}).$$

Cuando, en la posición inicial, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$ y A_2 es cedido, será

$$\left|\frac{dI}{dx_{12}}\right]_0 = -\frac{\partial I}{\partial a_1} + \frac{\partial I}{\partial a_2}\varphi_{21}'(0),$$

y, si en cambio es cedido A_2, tendremos

$$\left[\frac{dI}{dx_{12}}\right]_0 = \frac{\partial I}{\partial a_1} - \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

a) Sea

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} < \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

En este caso si A_1 es cedido, será $\frac{dI}{dx_{12}} > 0$ en la posición inicial $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$. Siendo, por hipótesis,

$$\frac{d^2I}{dx_{12}^2} > 0,$$

$\frac{dI}{dx_{12}}$ es función creciente por x_{12} creciente, pues, $\frac{dI}{dx_{12}}$ se conservará positivo para todo valor de $x_{12} > 0$, es decir, I será función creciente de x_{12} y tomará su valor máximo cuando $x_{12} = a_1$. La combinación $(0, a_2')$ será la combinación de máximo índice que el individuo puede obtener.

Si el individuo cede A_2, el valor de $\frac{dI}{dx_{12}}$ es negativo en la posición inicial $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$. Siendo, empero, $\frac{dI}{dx_{12}}$ función creciente de x_{12}, a medida que x_{12} crece, su valor absoluto irá disminuyendo, pudiendo llegar al valor cero (solución de (A)). Creciendo todavía x_{12}, $\frac{dI}{dx_{12}}$ tomará valores positivos, es decir, I empezará por decrecer, llegará a un valor mínimo para un cierto valor de x_{12} dado por las (A), y después irá creciendo a medida que crece x_{12}.

Para que x_{12} pueda llegar al valor dado por la (A), es necesario que la solución de las (A), que indicaremos con ξ_{12} satisfaga la desigualdad $\xi_{12} \geq x_{12}'$, pues x_{12}' es el valor máximo que puede tomar x_{12} cuando A_2 es cedido. Ahora cuando $\frac{dI}{dx_{12}} = 0$, será :

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi_{21}'(\xi_{12}) \frac{\partial I}{\partial X_2} = 0,$$

y pues, para que sea $\xi_{12} \leq x_{12}'$, será necesario tengamos

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} \geq \varphi_{21}'(x_{12}') \frac{\partial I}{\partial X_2}. \qquad (\alpha)$$

Si

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} \leq \varphi_{21}'(x_{12}') \frac{\partial I}{\partial X_2},$$

es fácil ver que al individuo no le convendrá la cesión de A_2, pues las combinaciones que obtendría tendrían siempre un índice menor de la inicial. Si en vez la (α) es satisfecha, el individuo puede tomando

$x_{12} > \xi_{12}$ hacer crecer el índice de la combinación hasta llegar a la combinación $(a_1', 0)$ que podrá tener un índice mayor de la combinación $(0, a_2')$ que hemos encontrado antes.

Hemos visto que es siempre

$$I(0, a_2') > I(a_1, a_2),$$

así que la combinación $(0, a_2')$ será siempre preferida a la combinación $(a_1\, a_2)$. En vez nada se puede decir, en general, sobre la combinación $(a_1', 0)$. Será preferida a la combinación (a_1, a_2) si

$$I(a_1', 0) > I(a_1, a_2)$$

y de las dos combinaciones $(0, a_2')$ $(a_1', 0)$ será preferida una u otra, según sea

$$I(0, a_2') \gtrless I(a_1',).$$

Resumiendo vemos : que si

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} < \varphi_{21}'(0) \frac{\partial I}{\partial a_2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} \leq \varphi_{21}'(x_{12}') \frac{\partial I}{\partial X_2},$$

la combinación a la cual llegara el individuo es $(0, a_2')$. Es decir, transformará toda la cantidad de A_1 que poseía en el momento inicial. En vez si verificada la primera desigualdad, tenemos :

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} > \varphi_{21}'(x_{12}') \frac{\partial I}{\partial X_2};$$

podrá convenir al individuo ceder A_2 en vez de A_1 siempre que sea

$$I(a_1', 0) > I(0, a_2').$$

b) Sea

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} > \varphi_{21}'(0) \frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

Con un razonamiento igual al empleado en el caso *a)* vemos que si

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} > \varphi_{21}'(a_1) \frac{\partial I}{\partial a_2'},$$

la combinación preferida por el individuo será $(a_1', 0)$, es decir, cederá toda la cantidad a_2 de A_2.

Si

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'}$$

podrá convenirle al individuo ceder A_1 siempre que sea

$$I(0, a_2') \geq I(a_1', 0).$$

c) Si

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2},$$

al individuo le convendrá transformar o todo a_1 o todo a_2, según sea

$$I(0, a_2') \gtrless I(a_1', 0).$$

21. Si $a_1 = 0$ y

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} < \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} \leq \varphi_{21}'(x_{12}')\frac{\partial I}{\partial X_2},$$

no es posible ninguna transformación.

Si

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} > \varphi_{21}'(x_{12}')\frac{\partial I}{\partial X_2},$$

puede convenir al individuo la transformación de toda la cantidad a_2, si

$$I(x_{12}', 0) > I(0, a_2).$$

Si

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} \geq \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2},$$

el individuo cederá toda la cantidad a_2.

Cuando $a_2 = 0$ y es

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} \leq \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial X_2},$$

el individuo cederá toda la cantidad a_1.

Si

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} > \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial X_2}$$

y es

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} > \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial X_2},$$

será imposible toda transformación. Si en vez

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial X_2},$$

podrá convenirle al individuo ceder toda la cantidad a_1 si

$$I[0, \varphi_{21}(a_1)] > I(a_1, a_2).$$

22. Supongamos ahora varíen las cantidades iniciales de los bienes a_1, a_2, y examinamos cual será la variación de g.

Tomamos el caso de

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} < \varphi_{21}'(0)\frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

Sabemos que la ganancia será dada por

$$g = I(0, a_2') - I(a_1, a_2)$$

o

$$g = I(a_1', 0) - I(a_1, a_2)$$

según sea

$$I(0, a_2') \gtrless I(a_1' 0).$$

En el primer caso tendremos, variando a_1 y a_2

$$\delta g = \frac{\partial I}{\partial a_2'}\delta a_2' - \frac{\partial I}{\partial a_1}\delta a_1 - \frac{\partial I}{\partial a_2}\delta a_2,$$

y siendo

$$\delta a_2' = \delta a_2 + \varphi_{21}'(a_1)\delta a_1,$$

tendremos

$$\delta g = \left[\frac{\partial I}{\partial a_1'}\varphi_{21}'(a_1) - \frac{\partial I}{\partial a_1}\right]\delta a_1 + \left[\frac{\partial I}{\partial a_2'} - \frac{\partial I}{\partial a_2}\right]\delta a_2.$$

Ahora, habiendo supuesto $\frac{\partial I}{\partial x_{1\circ}}$ siempre positivo, lo será también para los valores de las variables que corresponden a la transformación final, es decir, será :

$$-\frac{\partial I}{\partial X_1} + \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'} > 0,$$

o,

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'}.$$

Ahora si

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \geq 0,$$

será

$$\frac{\partial I}{\partial a_2'} < \frac{\partial I}{\partial a_2}, \qquad \frac{\partial I}{\partial a_1} < \frac{\partial I}{\partial X_1} < \varphi_{21}'(a_1)\frac{\partial I}{\partial a_2'},$$

y, pues,

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} > 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} < 0.$$

En el caso que el individuo elige la combinación $(a_1', 0)$, tendremos

$$\delta g = \frac{\partial I}{\partial a_1'}\delta a_1' - \frac{\partial I}{\partial a_1}\delta a_1 - \frac{\partial I}{\partial a_2}\delta a_2.$$

Siendo :

$$\delta a_1' = \delta a_1 + \delta x_{12}' = \delta a_1 + \frac{\delta a_2}{\varphi_{21}'(x_{12}')},$$

será

$$\delta g = \left[\frac{\partial I}{\partial a_1'} - \frac{\partial I}{\partial a_1}\right]\delta a_1 + \left[\frac{1}{\varphi_{21}'(x_{12}')}\frac{\partial I}{\partial a_1'} - \frac{\partial I}{\partial a_2}\right]\delta a_2.$$

Si el individuo prefiere $(a_1, 0)$ es, necesariamente,

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} > \varphi_{21}'(x_{12}')\frac{\partial I}{\partial X_2}.$$

Ahora, si

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \geq 0,$$

será

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} < \frac{\partial I}{\partial a_1}, \qquad \frac{\partial I}{\partial a_2} < \frac{\partial I}{\partial X_2},$$

y, *a fortiori*,

$$\frac{\partial I}{\partial a_1'} > \varphi_{21}'(x_{12})\frac{\partial I}{\partial a_2}.$$

Será, entonces,

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} < 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_2} > 0.$$

Si $\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} < 0$ nada puede decirse sobre los signos de $\frac{\partial g}{\partial a_1}, \frac{\partial g}{\partial a_2}$. Los resultados son los mismos del caso $d^2 I < 0$. Valen también para este caso las observaciones que hemos hecho, para el caso anterior, sobre el máximo y mínimo de g, cuando varía una de las cantidades iniciales de bienes, quedando la otra constante.

23. Hemos visto que cuando

$$\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_2} \geq 0, \qquad \frac{d^2 \varphi_{21}}{dx_{12}^2} \leq 0, \tag{10}$$

es siempre $d^2 I < 0$, pues, es suma de términos todos negativos. Su signo es independiente de los valores de X_1, X_2. Cuando, empero, no existen las desigualdades (10), al mismo tiempo, $d^2 I$ puede ser negativo o positivo, y su signo no depende solamente del signo de los términos de los cuales es suma, pero también de su valor absoluto. En el caso que x_{12} es cedida, tenemos

$$X_1 = a_1 - x_{12}, \qquad X_2 = a_2 + x_{21},$$

mientras cuando x_{21} es cedida, tenemos

$$X_1 = a_1 + x_{12}, \qquad X_2 = a_2 - x_{21},$$

es decir, en general, a un mismo valor absoluto de x_{12}, corresponden valores distintos de X_1, X_2, según que las transformaciones sean en un sentido o en el otro. Los términos que componen la suma $d^2 I$ tendrán valores distintos para un mismo valor absoluto de x_{12}, según ésta sea cedida o adquirida, es decir, que para un mismo valor absoluto x_{12} el signo de $d^2 I$ podrá ser distinto, según la clase de la transformación. Podremos, por consiguiente, tener otros casos, a más de los dos indicados, en los cuales se combinan los signos de $d^2 I$ distintos en las dos clases de transformación. Estos casos, empero, no los examinaremos, sea porque el método que se debe emplear es el mismo de los dos casos estudiados, y a más porque no es objeto nuestro resolver problemas particulares. Si hemos examinado con algunos detalles los casos precedentes ha sido para prepararnos al estudio del caso general, y aun para probar que los fenómenos económicos pueden ser estudiados sin necesidad de embarazosas construcciones gráficas.

24. Volvemos al caso general de la transformación individual con n bienes.

Hemos dicho que, en general, las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de todas las cantidades de bienes en relación con el individuo en cada momento, así que será

$$dx_{p,p-s} + \varphi'_{p,p-s}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\, dx_{p-s,p} = 0$$

indicando, como ya hemos hecho con $X_1, X_2, \ldots, X_n$, las cantidades variables de bieneo durante las transformaciones sucesivas, que el

individuo opera hasta llegar a la combinación de máximo índice, si existe. Las transformaciones sucesivas podemos siempre suponerlas hechas con cantidades infinitesimales de bienes.

Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ las cantidades iniciales de los bienes poseídos por el individuo y se quiere buscar cual será la combinación $(X_1, X_2, ..., X_n)$, cuando las $x_{p-s,p}$ toman valores dados. Se puede ver, inmediatamente, que, en general, no será posible determinar los valores de las X_1, $X_2, ..., X_n$, cuando sean dados los valores de las $x_{p-s,p}$ y las $\varphi'_{p,p-s}$ en cualquier punto. Será necesario, también, conocer el *camino de transformación* que sigue el individuo. Con un ejemplo vamos a aclarar este concepto.

Sea el individuo en presencia de los tres bienes A_1, A_2, A_3, cuyas cantidades iniciales sean a_1, a_2, a_3, las leyes de transformación sean :

$$dx_{21} + \varphi_{21}'(X_1, X_2, X_3)\, dx_{12} = 0$$

$$dx_{31} + \varphi_{31}'(X_1, X_2, X_3)\, dx_{13} = 0$$

$$dx_{32} + \varphi_{32}'(X_1, X_2, X_3)\, d\varphi_{23} = 0.$$

Partiendo de (a_1, a_2, a_3) supongamos que el individuo quiera transformar dx_{12}, dx_{13}, dx_{23}. El individuo podrá seguir varios caminos de transformación. Puede transformar dx_{12}, dx_{13}, dx_{23} *simultáneamente* : en este caso tendremos

$$dx_{21} = -\varphi_{21}'(a_1, a_2, a_3)\, dx_{12}$$

$$dx_{31} = -\varphi_{31}'(a_1, a_2, a_3)\, dx_{13}$$

$$dx_{32} = -\varphi_{32}'(a_1, a_2, a_3)\, dx_{23}.$$

Podrá en vez transformar simultáneamente dos de las dx_{12}, dx_{13}, dx_{23} y después transformar la tercera. Así se transforma antes simultáneamente dx_{12}, dx_{13} y después dx_{23}, tendremos

$$dx_{21} = -\varphi_{21}'(a_1, a_2, a_3)\, dx_{12}$$

$$dx_{31} = -\varphi_{31}'(a_1, a_2, a_3)\, dx_{13}$$

$$dx_{32} = -\varphi_{32}'(a_1 + dx_{12} + dx_{13}, a_2 + dx_{21}, a_3 + dx_{31})\, dx_{23}.$$

De la misma manera podría transformar antes simultáneamente dx_{12}, dx_{23} y después transformar dx_{13} o, también podría transformar simultáneamente dx_{13}, dx_{23} y después dx_{12}. Se obtendrían resultados distintos en cada caso. Otros caminos puede seguir el individuo y en

todos obtendrá valores finales de las X distintos y, en consecuencia, valores distintos en cada caso de las dx_{21}, dx_{31}, dx_{32}.

Para transformaciones sucesivas y para un número mayor de bienes, el número de casos irá aumentando, y, cuando se transformen cantidades finitas de bienes, el número de los caminos de transformación será infinito. No se puede, pues, determinar el valor final de las $X_1, X_2, ..., X_n$, si no se determina el camino de transformación que sigue el individuo.

En el número 8, cuando hemos hablado de la solución de las (T) y de las (S), no hemos mencionado la dependencia del resultado del camino de transformación que el individuo sigue por dos razones : primero para no complicar prematuramente nuestra investigación, y, segundo, aludir al camino de transformación era superfluo, puesto que las $X_1, X_2, ..., X_n$ se suponían dadas por la observación, y, por consiguiente, tácitamente se admitía que el individuo había llegado a ellas siguiendo un determinado camino de transformación.

En los otros casos, empero, si se quiere resolver el sistema (S), (T), tendremos tantas soluciones distintas, cuantos son los caminos de transformación que se puede seguir, y que, en general, serán en número infinito. Si el individuo puede elegir el camino, eligirá siempre aquel que le procure la combinación final de mayor índice.

25. Hemos visto en el número 11 que las (4) son siempre satisfechas si la transformación de los bienes no se hace directamente dos a dos, pero en vez se hace transformando todos los bienes por intermedio de un único bien. Recíprocamente, se puede demostrar que si las (4) existen, la transformación del bien A_{p-s}, como el bien A_p, se puede obtener con el mismo resultado final de la transformación directa, transformando una cantidad de A_1 con A_{p-s}, y una cantidad A_p con A_1, siempre que no varíe la cantidad de A_1, es decir, empleando la misma cantidad de A_1 en las dos transformaciones y *siempre que las dos transformaciones sean simultáneas.*

Tendremos, efectivamente,

$$dx_{p,p-s} = -\varphi'_{p,p-s}(X_1, X_2, ..., X_n)\, dx_{p-s,p}.$$

Para fijar las ideas, supondremos $dx_{p-s,p}$ cedido y $dx_{p,p-s}$ adquirido. En vez de ceder $dx_{p-s,p}$, en cambio de $dx_{p,p-s}$, podemos cederlo en cambio de una cantidad de A_1. Tendremos :

$$-dx_{p-s,p} = \varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, ..., X_n)\, dx_{1,p-s}.$$

Simultáneamente cedemos una cantidad de A_1 igual a $dx_{1,p-s}$ en cambio de una cantidad de A_p. Tendremos :

$$dx_{p1} = \varphi_{p1}'(X_1, X_2, X_n)\, dx_{1p},$$

y siendo

$$dx_{1,p} = -\, dx_{1,p-s} = \frac{dx_{p-s,p}}{\varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, ..., X_n)},$$

será

$$dx_{p,1} = -\, \frac{\varphi'_{p,1}(X_1, X_2, ..., X_n)}{\varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, ..., X_n)}\, dx_{p-s,p},$$

es decir, estando satisfechas las (4),

$$dx_{p,1} = dx_{p,p-s}.$$

Si las dos transformaciones no hubieran sido simultáneas, si se hubiera transformado antes $dx_{1,p-s}$ y después $dx_{1,p}$, tendríamos

$$-\, dx_{p-s,p} = \varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, ..., X_n)\, dx_{1,p-s},$$

$$dx_{p,1} = -\, \varphi'_{p,1}(X_1 + dx_{1,p-s}, X_2, ..., X_{p-s} + dx_{p-s,p}, ..., n)\, dx_{6,p}$$

y de

$$dx_{1,p} = -\, dx_{1,p-s} = \frac{dx_{p-s,p}}{\varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, ..., X_n)},$$

$$dx_{p,1} = -\, \frac{\varphi'_{p,1}}{\varphi'_{p-s,1}}\, dx_{p-s,p} - \frac{1}{\varphi'_{p-s,1}} \left[\frac{\partial \varphi'_{p,1}}{\partial X_1}\, dx_{1,p-s} + \frac{\partial \varphi'_{p,1}}{\partial X_{p-s}}\, dx_{p-s,p}\right] dx_{p-s,p},$$

y

$$dx_{p,p-s} = -\, \frac{\varphi'_{p,1}}{\varphi'_{p-s,1}}\, dx_{p-s,p}.$$

se ve que $dx_{p,1}$ y $dx_{p,p-s}$ no serían iguales.

Así que las tres transformaciones *simultáneas* : $dx_{1,p-s}$ con $dx_{p-s,1}$, $dx_{p-s,p}$ con $dx_{p,p-s}$ y $dx_{p,1}$ con $dx_{1,p}$, pueden ser reducidas a las dos transformaciones

$$dx_{1,p} + \frac{dx_{p,p-s}}{\varphi'_{p,1}} \qquad \text{con} \qquad dx_{p,1} + dx_{p,p-s},$$

$$dx_{1,p-s} + \frac{dx_{p-s,p}}{\varphi'_{p-s,1}} \qquad \text{con} \qquad dx_{p-s,1} + dx_{p-s,p}.$$

Semejantemente las transformaciones de n bienes, dos a dos, y que son $\frac{n(n-1)}{2}$ pueden reducirse a $n-1$ transformaciones de A_1 con los otros bienes, siempre que todas sean simultáneas, y que estén satisfechas las (4).

Cuando las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de todas las X_p y las (4), pues son de la forma

$$\varphi'_{p,p-s}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\varphi'_{p,1}(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\varphi'_{p-s,1}(X_1, X_2, \ldots, X_n)},$$

se comprende lo que significa decir : que están satisfechas en cada punto, pues el punto es dado por el sistema $(X_1, X_2, \ldots, X_3)$. Cuando, empero, las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de la sola variable $x_{p-s,p}$ y son verdaderas derivadas de funciones $\varphi_{p,p-s}(x_{p-s,p})$, las (4) son de la forma

$$\varphi'_{p,p-s}(x_{p-s,p}) = \frac{\varphi'_{p,1}(x_{1,p})}{\varphi'_{p-s,1}(x_{1,p-s})},$$

las derivadas están tomadas respecto a tres variables distintas y es preciso entenderse respecto a los que significa *cada punto*. En cada punto las cantidades de A_1 que se transforman con A_{p-s} y A_p son iguales, así que

$$x_{1,p-s} = x_{1,p},$$

y será

$$x_{p-s,1} = \varphi_{p-s,1}(x_{1,p}).$$

Tendremos, también,

$$x_{p-s,p} = x_{p-s,1} \qquad \text{y} \qquad x_{p,p-s} = x_{p,1},$$

donde

$$\varphi'_{p,p-s} = \frac{dx_{p,1}}{dx_{p-s,1}} = \frac{1}{\varphi'_{p-s,1}}\frac{dx_{p,1}}{dx_{1,p}} = \frac{\varphi'_{p,1}}{\varphi'_{p-s,1}}$$

(por un mismo valor de $x_{1,p}$ y $x_{1,p-s}$).

26. Cuando las (4) están satisfechas, tomamos el sistema

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p,1}\frac{\partial I}{\partial X_p} = 0. \qquad (S')$$

Si (S′) está satisfecho, estará también satisfecho (S), pues será

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} = \varphi'_{p,1}\frac{\partial I}{\partial X_p} = \varphi'_{p-s,1}\frac{\partial I}{\partial X_{p-s}}.$$

y, pues,

$$\frac{\partial I}{\partial X_{p-s}} - \frac{\varphi'_{p,1}}{\varphi'_{p-s,1}} \frac{\partial I}{\partial X_p} = 0,$$

o, existiendo las (4)

$$\frac{\partial I}{\partial X_{p-s}} - \varphi'_{p,p-s} \frac{\partial I}{\partial X_p} = 0.$$

Existiendo las (4), solamente las $n-1$ funciones que indicaremos con

$$\varphi'_{p,1} \qquad (p-2, 3, \ldots, n)$$

serán independientes. Las otras pueden ser determinadas sirviéndose de las (4) en cada punto cuando sean dadas las $\varphi'_{p,1}$. El sistema (T) podrá, pues, reducirse al sistema

$$dx_{p,1} + \varphi'_{p,1} dx_{1,p} = 0, \qquad \text{(T')}$$

ya que las otras ecuaciones de (T) dependerán de estas. Al sistema (S), (T) se podrá, pues, substituir el sistema (S'), (T') de $2n-2$ ecuaciones entre $2n-2$ incógnitas. El sistema (S'), (T') corresponde precisamente a la transformación de los $n-1$ bienes A_2, A_3, ..., A_n con A_1, que como hemos visto, puede ser substituída a la transformación general de los n bienes dos a dos, si existen las (4).

27. Puesto que, en general, admitiremos siempre la existencia de las (4), salvo que sea indicado expresamente lo contrario, cuando hablemos de la transformación de n bienes, entre ellos, nos referiremos siempre a la transformación de cada uno de los $n-1$ bienes A_2, A_3, ..., A_n con A_1. Las variables que tomaremos como independientes son

$$x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n},$$

es decir, las cantidades de A_1 que se transforman con cadauno de los otros bienes. Las variables dependientes serán

$$x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n}.$$

Si se indica con $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una combinación de los n bienes en un punto cualquiera será, en general,

$$X_1 = a_1 + \sum_2^n x_{1,p} \qquad X_p = a_p + x_{p,1} \qquad (p = 2, 3, \ldots, n),$$

e indicando con $I(X_1, X_2, ..., X_n)$, su índice será :

$$\frac{\partial I}{\partial x_{1p}} = \frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p,1}\frac{\partial I}{\partial X_p},$$

y

$$dI = \sum_2^n \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p,1}\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1,p}. \tag{12}$$

Cuando las $\varphi'_{p,1}$ son funciones de la sola variable independiente que corresponde a cadauna, es decir, cuando en general

$$x_{p,1} + \varphi_{p,1}(x_{1,p}) = 0,$$

tendremos :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1,p}\partial x_{1,q}} = \frac{\partial^2 I}{\partial X_1^2} - \varphi'_{p,1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_p} - \varphi'_{q,1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_q} + \varphi'_{p,1}\varphi'_{q,1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_p \partial X_q}.$$

Se ve que $\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1,p}\partial x_{1,q}}$ es simétrico respecto a las X_p y X_q y a las $\varphi'_{p,1}$ $\varphi'_{q,1}$, es decir, será :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1,p}\partial x_{1,q}} = \frac{\partial^2 I}{\partial x_{1,q}\partial x_{1,p}}.$$

Tendremos, entonces,

$$I = I(a_1, a_2, ..., a_n) + \sum_2^n \int_0^{X,p} \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1}\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p},$$

es decir, I es independiente del camino de integración : a iguales valores de las x_{1p} corresponderán iguales valores de las X_p y, por consiguiente, las soluciones del sistema (S') (T') quedan las mismas, cualquier sea el camino de transformación que sigue el individuo. Se podía llegar a este resultado más simplemente. Obsérvese que

$$X_1 = a_1 + \sum x_{1p} \qquad (p = 2, 3, ..., n)$$
$$X_p = a_p + \varphi_{p1}(x_{1p})$$

y se puede ver que para iguales valores de las x_{1p} no cambian aun que cambien los caminos de transformación.

Si en vez las φ'_{p1} dependen de las $X_1, X_2, ..., X_n$, y, en consecuencia de todas las variables independiente, tendremos

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1p}\partial x_{1q}} = \frac{\partial^2 I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_p} - \varphi'_{q1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_1 \partial X_q} + \varphi'_{p1}\varphi'_{q1}\frac{\partial^2 I}{\partial X_p \partial X_q} + \frac{\partial I}{\partial X_p}\frac{\partial \varphi'_{p1}}{\partial x_{1q}}$$

que ya no es simétrica entre las $\varphi'_{p1}\varphi'_{q1}$ y las $X_p X_q$ y será pues, en general

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1p}\partial x_{1q}} \neq \frac{\partial^2 I}{\partial x_{1q}\partial x_{1p}}.$$

Es decir, que (12) no es un diferencial exacto, y lo será solamente cuando se indique el camino de integración.

Si en todo el intervalo de transformación y para cualquier valor de p y q es

$$\frac{\partial \varphi'_{p,1}}{\partial x_{1,q}} \frac{\partial I}{\partial X_p} = \frac{\partial \varphi'_{q,1}}{\partial x_{1,p}} \frac{\partial I}{\partial X_q}, \tag{13}$$

(12) puede integrarse independientemente del camino de integración, lo que puede demostrarse también de la manera siguiente.

Sea $I(X_1, X_2 ..., X_n)$ el índice que corresponde a un punto x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n}. Transformense $dx_{1p}dx_{1q}$ en el orden escrito y sucesivamente: tendremos

$$dx_{p1} = -\varphi'_{p1}dx_{1p}$$

$$dx_{q1} = -\left(\varphi'_{q1} + \frac{\partial \varphi'_{q1}}{\partial x_{1p}} dx_{1p}\right) dx_{1q},$$

y el índice se vuelve

$$I + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1}\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p} + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \left(\varphi'_{q1} + \frac{\partial \varphi'_{q1}}{\partial x_{1p}} dx_{1p}\right)\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1q}.$$

Si en vez transformamos sucesivamente en el orden $dx_{1q}dx_{1p}$, tendremos:

$$dx_{q1} = -\varphi'_{q1}dx_{1q}$$

$$dx_{p,1} = -\left(\varphi'_{p1} + \frac{\partial \varphi'_{p1}}{\partial x_{1q}} dx_{1q}\right) dx_{1p},$$

y el índice se vuelve

$$I + \left(\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{q1}\frac{\partial I}{\partial X_q}\right) dx_{1q} + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \left(\varphi'_{p1} + \frac{\partial \varphi'_{p1}}{\partial x_{1q}} dx_1\right)\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p}.$$

En el primer caso tendremos

$$I + dI = I + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1}\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p} + \\ + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{q1}\frac{\partial I}{\partial X_q}\right] dx_{1q} - \frac{\partial \varphi'_{q1}}{\partial x_{1p}}\frac{\partial I}{\partial X_q} dx_{1p}dx_{1q},$$

y en el segundo

$$I + dI = I + \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{p1}\frac{\partial I}{\partial X_p}\right] dx_{1p} +$$
$$+ \left[\frac{\partial I}{\partial X_1} - \varphi'_{q1}\frac{\partial I}{\partial X_h}\right] dx_{1q} - \frac{\partial \varphi'_{p1}}{\partial x_{1q}} dx_{1p} dx_{1q},$$

es decir, que si existe la igualdad (13) los dos incrementos del índice son iguales. Se puede ver también que, cuando las $\varphi'_{p,p-s}$ dependen solamente de la variable $x_{p-s,p}$, la (13) estará satisfecha, pues,

$$\frac{\partial \varphi'_{p.1}}{\partial x_{1.q}} = 0. \qquad \frac{\partial \varphi'_{q.1}}{\partial x_{1.p}} = 0.$$

28. En lo sucesivo hablaremos solamente de transformaciones independientes del camino que se sigue para hacerlas, porque, salvo excepciones que deberán ser claramente especificadas cuando se presenten, son las únicas que tienen importancia en el fenómeno económico concreto. Entenderemos, o que las $\varphi'_{p,p-s}$ son funciones de la sola variable $x_{p-s,p}$, y este es el caso más común, o que el camino de transformación está indicado. En este último caso el índice se reduce a una función de una sola variable, pues, establecer un camino de integración quiere decir establecer tantas ecuaciones entre las variables, suficientes para que todas se vuelvan función de una sola.

Así, por ejemplo, supóngase un individuo en presencia de los n bienes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las cantidades iniciales respectivamente de estos bienes. Las leyes de transformación sean representadas por

$$dx_{p1} + \varphi'_{p1}(X_1)\, dx_{1p} = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots, n).$$

Ya que X_1 depende de todas las variables independientes x_{1p}, todas las funciones φ'_{p1} dependerán de todas las x_{1p}. Supongase dado un camino de transformación, por ejemplo, el siguiente : cada cantidad de A_1 debe ser transformada en partes iguales con cadauno de los otros bienes $A_2, \ldots, A_n$. Si x_1 es la parte total de A_1 transformada en un dado momento, para la transformación elemental sucesiva, tendremos :

$$dx_{12} = dx_{13} = \ldots = dx_{1n} = \frac{1}{n-1} dx_1$$

y el sistema de transformación será

$$dx_{p1} + \varphi'_{p1}(a_1 - x_1)\frac{dx_1}{n-1} = 0 \qquad (p = 2, 3, ..., n),$$

es decir, todas las x_{p1} son funciones de la sola x_1.

Tendremo :

$$dI = \sum_1^n \frac{\partial I}{\partial X_p} dX_p,$$

y en el punto donde $dI = 0$

$$\frac{\partial I}{\partial X_1} - \frac{I}{n-1}\sum_2^n \varphi'_{p1}\frac{\partial I}{\partial X_p} = 0.$$

Se ve que dI es función de la x_1, y el problema, según el signo de d^2I, podrá ser discutido en la misma forma del problema con dos bienes.

29. En el caso en que la φ'_p son cadauna función de la sola x_{1p} correspondiente, el camino de trensformación no tiene influencia sobre el resultado que da la transformación de dadas cantidades x_{1p}. Se puede, pues, suponer que el individuo haya seguido el camino de transformación que se presta mejor a la investigación. A pesar de esta libertad, no basta conocer el signo de d^2I para hacer una discusión completa : sería necesario hace otras hipótesis suplementarias que aumentan el número de casos posibles.

Hay, empero, un caso importantisimo por las aplicaciones que tiene en la teoría de los precios y en muchas otras, que se presta muy bien a una discusión general completa y que puede servir de guía para la discusión de otros casos. El caso a quien nos referimos es aquel en el cual las leyes de transformación son

$$x_{p1} + m_{p1}x_{1p} = 0 \qquad (p = 2, 3, ..., n), \qquad (t)$$

donde las m_{p1} son cantidades que quedan constantes durante las transformaciones, y los bienes son todos independientes, así que el sistema (S) es

$$I_1'(X_1) - m_{p1}I'(X_p) = 0 \qquad (p = 2, 3, ..., n), \qquad (s)$$

donde

$$X_1 = a_1 + \sum x_{1p}, \qquad X_p = a_p - m_{p1}x_{1p}.$$

Si las cantidades de bienes, en el momento inicial son respectivamente $a_1, a_2, ..., a_n$, con transformaciones operadas siguiendo las (t)

se puede siempre obtener la combinación $\left(a_1 + \sum_2^n \frac{a_1}{m_{p1}}, 0, 0, ..., 0\right)$ y, ya que el camino de integración es arbitrario, se puede siempre suponer que esta combinación sea la inicial. Así que podremos limitar nuestras investigaciones al caso en que la combinación inicial es $(a_1, 0, 0, ..., 0)$.

En este caso A_1 será siempre cedido, $A_2, A_3, ..., A_n$ siempre adquiridos. En un punto cualquiera $(X_1, X_2, ..., X_n)$, tendremos :

$$\frac{\partial I}{\partial x_{1p}} = - I_1'(X) + m_{p1} I'(X_p)$$

$$dI = \sum_2^n \left[- I_1'(X_1) + m_{p1} I'(X_p)\right] dx_{1p}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1p}^2} = I_1''(X_1) + m_{p1}^2 I''(X_p)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_{1p} \partial x_{1q}} = I_1''(X_1),$$

y, en consecuencia,

$$d^2 I = I_1''(X_1) \left[\sum_2^n dx_{1p}\right]^2 + \sum_2^n m_{p1}^2 I''(X_p)\, dx_{1p}.$$

Y se ve que d^2I es suma de términos todos negativos, así que es siempre $d^2I < 0$.

30. Si las (s) (t) tienen una solución, compatible con las condiciones iniciales del problema, tendrán una sola. Efectivamente, si suponemos que el sistema tiene dos soluciones distintas, indicamoslas con $X_1', X_2', ..., X_n'$ y $X_1'', X_2'', ..., X_n''$. Tendremos por las (s)

$$I_1'(X_1') = m_{21} I_2'(X_2') = ... = m_{p1} I_p'(X_p')$$

$$I_1'(X_1'') = m_{21} I_2'(X_2'') = ... = m_{p1} I_p'(X_p'').$$

Por las conocidas propiedades de los índices elementales si una de las X_p' es mayor, igual o menor de las correspondientes X_p'', todas las X_p' serán mayores, menores o iguales de las correspondientes X_p''. Ahora tenemos

$$X_1' = a_1 - \sum x_{1p} \qquad X_p' = m_{p1} x_{1p}'$$

$$X_1'' = a_1 - \sum x_{1p}'' \qquad X_p'' = m_{p1} x_{1p}'',$$

y, pues, si $X_1' > X_1''$ deberá ser $\sum x_{1p} < \sum x_{1p}''$, y, ya que todas las X_p' deben ser simultáneamente mayores, iguales o menores de las correspondientes X_p'', será $X_p' < X_p''$ en contradicción con la hipótesis $X_1' > X_1''$ que no puede ser admitida. De la misma manera se puede ver que no se puede admitir la hipótesis $X_1' < X_1''$, así que deberá ser $X_1 = X_p$ y también $X_p' = X_p''$, es decir, la solución de (s) (t) será única.

31. El individuo que cede dx_{1p} en cambio de dx_{p1} obtiene un aumende índice dado por

$$dI = [- I_1'(X_1) + m_{p1} I_p'(X_p)]\, dx_{1p}$$

que será positivo, nulo o negativo, según sea positiva, nula o negativa la diferencia

$$- I_1'(X_1) + m_{p1} I_p'(X_p).$$

Esta diferencia irá diminuyendo a medida que crece x_{1p}, pues es $d^2 I < 0$.

Por los demás es fácil ver que creciendo x_{1p} disminuye X_1 y crece X_p y, pues, $I_1'(X_1)$ crece y $I_p'(X_p)$ disminuye.

Si se opera una transformación con los dos bienes A_q y A_r cediendo una cantidad de A_q en cambio de A_r, y la transformación se hace por intermedio del bien A_1, hemos ya visto que esta transformación se efectuará de la manera siguiente. Se transforma dx_{q1} de A_q en dx_{1q} de A_1 y después se transforma dx_{1q} en dx_{r1} de A_r. Con la primera transformación se obtiene un aumento de índice

$$[I_1'(X_1) - m_{q1} I_q'(X_q)]\, dx_{1q}$$

y con la segunda un aumento de índice

$$[- I_1'(X_1) + m_{r1} I_r'(X_r)]\, dx_{1q},$$

así que el aumento total de índice será

$$[- m_{q1} I_q'(X_q) + m_{r1} I_r'(X_r)]\, dx_{1q}.$$

Este resultado se puede obtener también de la manera siguiente La ley de transformación de A_q en A_r por las (4) es

$$x_{rq} + \frac{m_{r1}}{m_{q1}} x_{qr} = 0.$$

Transformando dx_{qr} con dx_{rq}, tenemos un aumento de índice dado por

$$I_q'(X_q)\,dx_{qr} + I\ (X_r)\,dx_{rq},$$

o

$$\left[I_q'(X_q) - \frac{m_{r1}}{m_{q1}} I_r'(X_r)\right] dx_{qr}.$$

Tenemos :

$$dx_{q1} + m_{q1} dx_{1q} = 0$$

$$dx_{qr} = dx_{q1} = - m_{q1} dx_{1q},$$

así que el aumento de índice será

$$[- m_{q1} I_q'(X_q) + m_{r1} I_r'(X_r)]\, dx_{1q}.$$

32. Formamos los productos $m_{p1} I_p'(0)$, que, en general, tendrán valores distintos por distintos valores de p. Haremos la notación de manera que sea siempre

$$m_{21} I_2'(0) \geq m_{31} I_3'(0) \geq ... \geq m_{n1} I_n'(0).$$

Ya que el camino de transformación es arbitrario, supondremos siempre que el individuo para llegar a la combinación de índice máximo $(X_1, X_2, ..., X_n)$ partiendo de $(a_1, 0, 0, ..., 0)$, siga siempre la vía siguiente : Empieza con transformar A_1 con A_2 para obtener la combinación de índice máximo, supuesta la transformación limitada a los dos bienes (X_1', X_2') : partiendo de la combinaeión $(X_1', X_2', 0)$ efectúa las transformaciones necesarias para llegar a la combinación de tres bienes de máximo índice (X_1'', X_2'', X_3''). De la misma manera pasa a la combinación de máximo índice de cuatro bienes y sigue hasta llegar y transformar la combinación de máximo índice de $n - 1$ bienes en la combinación de máximo indice de n bienes $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Observaremos que llegado el individuo a una combinación de máximo índice entre p bienes $(X_1, X_2, ..., X_p)$ entre las cantidades X_1, X_2, ..., X_p existe la relación

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2) = ... = m_{p1} I_p'(X_p),$$

y si de esta combinación de p bienes pasa a la combinación de $p + 1$ bienes $(X_1', ..., X'_{p+1})$, también de máximo indice, deberá existir la relación

$$I_1'(X_1') = m_{21} I_2'(X_2') = ... = m_{p+1,1} I'_{p+1}(X'_{p+1}).$$

Para que estas dos relaciones puedan existir simultáneamente, es necesario y suficiente la condición

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2) = \ldots = m_{p1} I_p'(X_p) < m_{p+1,1} I'_{p+1}(0). \qquad (14)$$

Efectivamente; la condición (14) esté satisfecha : transformando una cantidad $dx_{p,1}$ de A_p en una cantidad de A_{p+1} hemos visto que el incremento del índice para el individuo es

$$\left[I_p'(X_p') - \frac{m_{p+1,1}}{m_{p,1}} I'_{p+1}(X'_{p+1}) \right] dx_{p,1}.$$

incremento que. siendo dx_{p1} negativo (cedido), es positivo, pues la cantidad entre paréntesis es, por la (14), negativa cuando $X_{p+1} = 0$ y lo seguirá siendo para transformaciones sucesivas hasta llegar a valores de X_p' y X'_{p+1} que satisfacen la igualdad

$$m_{p1} I_p'(X_p') = m_{p+1,1} I'_{p+1}(X'_{p+1}).$$

Esto se puede repetir para todos los bienes $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$, así que existiendo la (14) la transformación de la combinación de p bienes en la combinación de $p+1$ bienes es posible.

Del razonamiento precedente resulta que no solamente esta transformación es posible, sino que es conveniente para el individuo; es decir, que el índice de la combinación de máximo índice $(X_1', \ldots, X'_{p+1}$, es mayor que el índice de la combinación de máximo índice $(X_1, \ldots, X_p)$. Resulta, pues, que existiendo la (14) el individuo pasará siempre a la combinación de máximo índice de $p+1$ bienes. Se deduce también que cuando se pasa de la combinación $(X_1, \ldots, X_p)$ a la combinación $(X_1', \ldots, X'_{p+1})$, será siempre

$$X_1' < X_1 \qquad X_2' < X_2 \ldots X_p' < X_p.$$

Si

$$I'(X_1) = m_{21} I'(X_2) = \ldots = m_{p1} I'(X_p) \geq m_{p+1,1} I'_{p+1}(0), \qquad (15)$$

la combinación de $p+I$ bienes no conviene al individuo, pues transformando cualquiera de los bienes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ con A_{p+1}, tendría un incremento de índice negativo. Del sistema de notación que hemos adoptado, resulta que si se verifica la desigualdad (15) a mayor razón. será

$$m_{p1} I_p'(X_p) > m_{q,1} I_q'(0)$$

si

$$p < q \leq n$$

lo que demuestra que si es imposible la transformación de la combinación de máximo índice de p bienes en combinación de máximo índice de $p+1$ bie1es, será también imposible que el individuo llegue a combinaciones de máximo índice de $p+2, p+3, ..., n$ bienes. En una palabra el individuo en sus transformaciones, se detendrá llegado a la oombinación de p bienes, de máximo índice, comportándose como si los bienes $A_{p+1}, A_{p+2}, ..., A_n$ no existieran.

33. Si

$$I_1'(a_1) \geq m_{21} I_2'(0),$$

la combinación de máximo índice para el individuo es $(a_1, 0, 0, ..., 0)$, es decir, al individuo le es imposible toda transformación. Si

$$I_1'(a_1) < m_{21} I_2'(0),$$

al individuo le conviene pasar a la combinación de dos bienes (X_1, X_2) donde X_1 y X_2 satisfacen a la relación

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2).$$

Si

$$I_1'(a_1) \geq m_{31} I_3'(0) \qquad (16)$$

a mayor razón será

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2) > m_{31} I_3'(0).$$

y por consiguiente, al individuo no le convendrá pasar de la combinación de dos bienes de máximo índice a una combinación de tres bienes. Así que si se verifica la desigualdad (16) para el individuo, son imposibles todas las transformaciones que puedan llevarle a una combinación de tres o más bienes.

Si

$$I_1'(a_1) < m_{31} I'(0), \qquad (17)$$

puede convenir al individuo la combinación de tres bienes (X_1', X_2', X_3'). La condición (17) es *necesaria* para que el individuo pueda llegar a una combinación de tres bienes, pero no es *suficiente,* pues para que la combinación de tres bienes sea posible es necesario y suficiente sea

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2) < m_{31} I_3'(0), \qquad (18)$$

y siendo $I_1'(X_1) > I'(a_1)$ se puede verificar la (17) sin que sea verificada la (18) : mientras si se verifica la (18), la (17) también será verificada. Semejantemente si para un bien cualquiera A_p tenemos :

$$I_1'(a_1) \geq m_{p1} I_p'(0), \qquad (19)$$

le será imposible al individuo llegar a la combinación de p bienes y a mayor razón a combinaciones de $p+1$..., n bienes, pues en este caso es imposible se verifique la (14) que hemos visto, es condición necesaria y suficiente para que sea posible llegar a la combinación de p bienes. Si en vez

$$I_1'(a_1) < m_{p1} I_p'(0), \tag{20}$$

puede ser posible la combinación de p bienes. La condición (20) es, pues, necesaria para que sea conveniente para el individuo llegar a la combinación de p bienes : no es suficiente, empero, pues de la (20) no se infiere necesariamente la (14). Así pues, ordenados los bienes como hemos indicado al principio del número 32, podemos separar todos los bienes para los cuales se verifica la (19), pues ya sabemos que el individuo los excluirá en sus transformaciones. Para los otros será necesario proceder a las combinaciones sucesivas de dos, tres, ..., bienes para verificar, cuando se pasa de una combinación a otra de mayor número de bienes, si la (14) está satisfecha.

34. Si el individuo en presencia de n bienes que se transforman según el sistema (t) y son de consumo inmediato, independientes, llega a la combinación de máximo índice de los n bienes $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ya sabemos que si X_p es nula, lo serán también $X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n$, así que en realidad la combinación se reduce a una combinación de $p-1$ bienes. Hay una excepción, empero, y es que X_1 puede ser nula sin que lo sean $X_2, X_3, ..., X_n$. Vamos a investigar como pueda suceder este caso.

Habiendo ya observado que cuando de una combinación de p bienes $(X_1 ...)$ se pasa a la combinación $(X_1' ...)$ de $p+1$ bienes es siempre $X_1' < X_1$, deduciremos que si de la combinación $(a_1, 0, ..., 0)$ el individuo ha llegado a la combinación de dos bienes (X_1, X_2) y X_1 es nulo, X_1 será también nulo en todas las combinaciones sucesivas de tres, cuatro, ..., bienes que el individuo pueda obtener.

Nos basta examinar, pues, la condición que se requiere para que en la transformación que el individuo opera para pasar de la combinación $(a_1, 0)$ a la combinación (X_1, X_2), resulte $X_1 = 0$. Para esto nos es suficiente recordar las fórmulas del número (16), y vemos inmediatamente que esta condición es

$$I_1'(0) \leq m_{21} I_2'(m_{21} a_1), \tag{21}$$

Cuando la (21) está satisfecha la combinación de máximo índice de dos bienes, será $(0, m_{21}a_1)$. La combinación de máximo índice de tres bienes será $(0, X_2, X_3)$. Vamos a demostrar que X_2 no puede ser nulo. Efectivamente, para que en la transformación de la combinación $(0, m_{21}a_1, 0)$ en la combinación $(0, X_2, X_3)$ de máximo índice fuera $X_2 = 0$ sería necesario existiera la desigualdad

$$m_{21}I_2'(0) \leq m_{31}I_3'(m_{31}a_1).$$

Dada nuestra notación sabemos que siempre es

$$m_{21}I_2'(0) \geq m_{31}I_3'(0).$$

A *fortiori* será siempre

$$m_{21}I(0) > m_{31}I_3'(m_{31}a_1).$$

No hay necesidad de repetir la demostración para probar que tampoco en las sucesivas combinaciones de máximo índice $(0, X_2, X_3, X_4)$ ... $(0, X_2, ..., X_n)$ no podrá ser $X_2 = 0$.

35. Resumiendo : Dado un individuo en presencia de n bienes A_1, ..., A_n de consumo inmediato, independientes, que se transforman según un sistema

$$x_{p1} + m_{p1}x_1 = 0 \qquad (p = 2, 3, ..., n), \tag{t}$$

donde m_{p1} es constante, la combinación de máximo índice $(X_1, X_2, ..., X_n)$ que el individuo puede formar con los n bienes, si existe, satisface a las ecuaciones

$$I_1'(X_1) = m_{21}I_2'(X_2) = ... = m_{n1}I_n'(X_n). \tag{s}$$

Se toma la notación de los bienes, de manera que sea

$$m_{21}I_2'(0) \geq m_{31}I_3'(0) \geq ... \geq m_{n1}I_n'(0) \tag{q}$$

y se supone siempre que la combinación inicial sea $(a_1, 0, ..., 0)$, pues cualquiera fuera la combinación, se podría siempre, con transformaciones según el sistema (t), reducirla a la forma indicada.

Tendremos, entonces, los dos casos siguientes :

A) Si es

$$I_1'(a_1) \geq m_{21}I_2'(0) \tag{1}$$

no es posible ninguna transformación. La combinación de máximo índice para el individuo es $(a_1, 0, ..., 0)$;

B) Si es

$$I_1'(a_1) < m_{21} I_2'(0) \qquad (2)$$

son posibles transformaciones. Cuando se verifica la (2) son posibles los casos siguientes :

a) Si

$$m_{n1} I_n'(0) > I_1'(a_1) \qquad (3)$$

en la combinación de n bienes de máximo índice X_n *puede* ser distinta de cero. La (3) es condición *necesaria* pero no *suficiente.* Para que en la combinación de máximo índice (X_1', X_2', ... X_n') una X_p' sea distinta de cero es necesario y suficiente que, formada la combinación de máximo índice de $p - 1$ bienes (X_1, ..., X_{p-1}) sea :

$$I_1'(X_1) = m_{21} I_2'(X_2) = m_{p-1,1} I'(X_{p-1}) < m_{p1} I_p'(0). \qquad (4)$$

Si en la combinación de máximo índice (X_1, X_2, ..., X_n), una de las X, X_p, por ejemplo, es nula, son nulas también todas las X_{p+1}, X_{p+2}, ..., sucesivas y la combinación de máximo índice para el individuo se reduce a una combinación de los primeros $p - 1$ bienes. Cuando de una combinación de máximo índice de p bienes (X_1, ..., X_n) conviene al individuo pasar a la combinación de máximo índice de $p + 1$ bienes (X_1', ..., X_{p+1}), es siempre

$$X_1' < X_1, X_2' < X_2, ..., X_p' < X_p 0 < X'_{p+1}; \qquad (5)$$

b) Si

$$I_1'(0) \leq m_{21} I_2'(m_{21} a_1), \qquad (6)$$

en todas las combinaciones de máximo índice sucesivas, de dos, tres, ..., n bienes que sean posibles, es siempre $X_1 = 0$. En ningún caso, puede ser $X_2 = 0$.

36. Las propiedades indicadas de las combinaciones de máximo índice sucesivos permiten una solución rápida por aproximación, del sistema (t) (s). Colocados los bienes en el orden necesario para que sea satisfecha la (q) del número precedente, se puede excluir desde un principio los bienes para los cuales no fuera

$$I_1'(a_1) < m_{p1} I_p'(0),$$

suprimiendo en los sistemas (t) (s) las ecuaciones correspondientes. Si también el bien A_2 se encontrara en este caso, tendríamos el caso A) del número precedente y toda transformación sería imposible.

Supondremos, pues, estar en el caso B) y supongamos sea

$$I_1'(0) > I_2'(m_{21}a_1).$$

Sabemos que X_1 no puede ser nula. Existirá, pues, una solución

$$X_1' = a_1 - x_{12}', \qquad X_2' = m_{21}x_{12}', \qquad x_{12}' < a_1,$$

de la ecuación

$$I_1'(X_1') = m_{21}I_2'(X_2').$$

Obtenida esta solución confrontamos el valor de $m_{21}I_2'(X_2')$ con el de $m_{21}I_2'(0)$. Si

$$m_{21}I_2'(X_2') \geq m_{31}I_3'(0),$$

ya sabemos que la combinación de máximo índice para el individuo es $(X_1, X_2, 0, ..., 0)$ y es inútil buscar otras soluciones.

Si en vez

$$m_{21}I_2'(X_2) < m_{31}I_3'(0),$$

podremos encontrar una solución

$$X_1'' = a_1 - x_{12}'' - x_{13}'', \qquad X_2'' = m_{21}x_{12}'', \qquad X_3'' = m_{31}x_{13}'',$$

de la ecuación

$$I_1'(X_1'') = m_{21}I_2'(X_2'') = m_{31}I_3'(X_3'').$$

Ahora si

$$m_{31}I_3'(X_3'') \geq m_{41}I_4'(0),$$

la combinación de máximo índice para el individuo será $(X_1'', X_2'', X_3'', 0, ..., 0)$. Si es

$$m_{31}I_3'(X_3'') < m_{41}I_4'(0),$$

existirá una combinación de cuatro bienes que conviene más al individuo que la anterior de tres. De esta combinación de cuatro bienes, podremos pasar a la combinación de cinco bienes, si existe, que conviene más al individuo de la de cuatro y así sucesivamente hasta llegar al bien A_n.

Si

$$I_1'(0) \leq m_{21}I_2'(m_{21}a_1),$$

será $X_1 = 0$ en todas las combinaciones de máximo índice de dos, tres, etc., bienes.

Partiremos, entonces, de la combinación $(0, m_{21}a_1, 0, ..., 0)$ procediendo en todo como anteriormente, y dejando a parte el bien A_1 como si no existiera.

37. Ya hemos definido la ganancia, es decir, la diferencia

$$I(X_1, ..., X_n) - I(a_1, a_2, ..., a_n)$$

entre el índice de la combinación final y la de la combinación inicial en una transformación.

En el caso de los bienes independientes, supuesta la combinación inicial ser $(a_1, 0, ..., 0)$. la ganancia g será :

$$g = I_1(X_1) + I_2(X_2) + ... + I_n(X_n) - I_1(a_1).$$

Fijadas las leyes de transformación, y siendo la combinación final la de máximo índice posible para el individuo, la ganancia es función de a_1, pues, las $X_1, X_2, ..., X_n$ están determinadas unívocamente.

Variando a_1 y quedando invariadas las m_{p1} tendremos :

$$\delta g = I_1'(X_1)\,\delta X_1 + I_2'(X_2)\,\delta X_2 + ... + I_n'(X_n)\,\delta X_n - I_1'(a_1)\,\delta a_1,$$

y será

$$\delta X_1 = \delta a_1 - \sum \delta x_{1p}, \qquad \delta X_p = m_{p1}\delta x_{1p},$$

$$\delta g = [I_1'(X_1) - I_1'(a_1)]\,\delta a_1 + \sum_{2}^{n} [- I_1'(X_1) + m_{p1} I_p'(X_p)]\,\delta x_{1p}.$$

Siendo, para cualquier valor de p

$$- I_1'(X_1) + m_{p1} I_p'(X_p) = 0,$$

será

$$\delta g = [I_1'(X_1) - I_1'(a_1)]\,\delta a_1.$$

Como siempre es $X_1 \leq a_1$ será siempre

$$I_1'(X_1) - I_1'(a_1) > 0,$$

y, pues-

$$\frac{\delta g}{\delta a_1} > 0.$$

Es decir, que la ganancia crece y decrece con a_1.

Si $X_1 = 0$ en la combinación de máximo índice será :

$$\delta g = \sum m_{p1} I_p'(X_p)\,\delta x_{1p} - I_1'(a_1')\,\delta a_1,$$

o siendo

$$m_{21} I_2'(X_2) = m_{31} I_3'(X_3) = ... = m_{n1} I_n'(X_n) \qquad \sum \delta x_{1p} = \delta a_1,$$

$$\delta g = [m_{21} I_2'(X_2) - I_1'(a_1)]\,\delta a_1.$$

Sabemos que si X_1 es siempre nulo en la combinación de máximo índice será :

$$m_{21}I_2'(X_2) \geq I_1'(0) > I_1'(a_1),$$

y, pues, también en este caso

$$\frac{\partial g}{\partial a_1} > 0.$$

Esto podía deducirse también en la manera siguiente :

Si $X_1 = 0$, se puede tómar como combinación inicial $(m_{21}a_1, 0, ..., 0)$. Sabemos que X_2 no será nunca nulo, así que g crecerá o decrecerá con $m_{21}a_1$, es decir, siendo m_{21} constante, con a_1.

Si a_1 queda invariada y hacemos variar una de las m_{p1}, m_{q1}, por ejemplo, variará la ganancia y variarán, en general, todas las x_{1p}, así que tendremos

$$\partial X_1 = -\sum \partial x_{1p}, \qquad \partial X_q = m_{q1}\partial x_{1q} + x_{1q}\partial m_{q1}$$

$$\partial X_p = m_{p1}\partial x_{1p} \qquad (p \neq q)$$

$$\partial g = \sum_2^n [-I_1'(X_1) + m_{p1}I_p'(X_p)]\,\partial x_{1p} + x_{1q}'(X_q)\,\partial m_{q1},$$

o siendo la cantidad entre paréntesis siempre nula

$$\partial g = x_{1q}I_q'(X)\,\partial m_{q1}.$$

Será, pues,

$$\frac{\partial g}{\partial m_{q1}} > 0,$$

es decir, g crece o decrece con m_{q1}.

Si varían todas las m_{p1} tendremos :

$$\partial g = \sum_2^n x_{1p}I_p'(X_p)\,\partial m_{p1}.$$

Si todas las variaciones ∂m_{p1} son del mismo signo, la variación de g será del mismo signo que las ∂m_{p1}, si empero, las ∂m_{p1} no son todas del mismo signo no será posible, en general, indicar *a priori* el signo de ∂g.

En cuanto a las variaciones de las x_{1p} y de las X_p, cuando varía a_1, con razonamiento muy fácil, semejante al del número 30, se prueba que todas las x_{1p} y todas las X_p crecen o decrecen con a_1.

Paraná, 1927.

UN ERROR SISTEMÁTICO

DE LAS

LONGITUDES GEOGRÁFICAS SUDAMERICANAS

POR EL DOCTOR JUAN HARTMANN
Director del Observatorio Astronómico de la Universidad de La Plata

---

Con ayuda de las compañías Transradio Internacional y Unión Telefónica hemos efectuado una nueva determinación de la longitud geográfica del Observatorio de La Plata. El señor ingeniero Pierre J. Noizeux, superintendente de la estación receptora en Villa Elisa hizo recibir, con las instalaciones excelentes de la Transradio Internacional, las señales de hora exacta transmitidas por varias estaciones norteamericanas y europeas, que, sin intervención de un relais mecánico, se transmitieron, sobre una línea de la Unión Telefónica, al Observatorio de La Plata, donde fueron registrados por un cronógrafo y comparados con los péndulos del Observatorio.

Me es muy grato expresar mis vivas gracias al señor G. E. Hohmann, gerente de la sección La Plata de la Unión Telefónica, al señor Carlos Rueckauf, gerente de la Transradio Internacional y al señor Pierre J. Noizeux, por su ayuda muy valiosa que han prestado a este Observatorio.

Hemos recibido las señales de Annapolis y de Arlington (Estados Unidos) y de Nauen (Alemania), y de las mismas estaciones se recibieron en los observatorios europeos de Hamburgo, Potsdam y París, cuyas longitudes se conocen con la mayor exactitud. Comparando las dos recepciones, resultaron los siguientes valores de la longitud oeste de Greenwich del gran Círculo Meridiano Gautier del Observatorio de La Plata:

1926.	Nov. 20.	Annapolis-Potsdam............	$\lambda = 3^h51^m43^s.79$
	Nov. 24.	Annapolis-Potsdam............	43.78
	Nov. 24.	Annapolis-París................	43.69
	Nov. 24.	Arlington-París	43.71
	Dic. 21.	Annapolis-Potsdam	43.68
	Dic. 23.	Annapolis-Potsdam-París........	43.65
	Dic. 23.	Nauen-Hamburgo-Potsdam-París .	43.81
1927.	Abr. 18.	Nauen-Hamburgo-Potsdam	43.78
	Abr. 18.	Annapolis-Potsdam............	43.75
		Promedio......	$3^h51^m43^s.74 \pm 0^s.02$

Este valor está 1^s06 menor que la longitud adoptada hasta ahora, de $3^h51^m44^s80$, sobre cuyo origen informa un trabajo del profesor W. J. Hussey publicado en el primer tomo de las publicaciones de este Observatorio, páginas 65-70. Se habían hecho las siguientes cuatro determinaciones de la longitud de La Plata:

		Peso
1ª En 1894, diferencia cronométrica de Montevideo..	$3^h51^m43^s.79$	0
2ª En 1895, diferencia telefónica de Montevideo.....	44.46	1
3ª En 1902, diferencia telegráfica de Córdoba.......	44.92	2
4ª En 1906, diferencia telegráfica de Palermo	44.86	2

Atribuyendo los pesos anotados a los cuatro valores, resulta el valor $3^h51^m44^s80$ que parecía bastante acertado. Tanto mayor fué mi sorpresa al obtener, por las nuevas observaciones, una longitud más de un segundo diferente, y me parecía menester buscar la causa de tal discrepancia.

Ya pudo concluirse de la concordancia de los tres últimos valores, determinados por exactas comparaciones telegráficas que lo más probable fué un error común a las longitudes de los tres puntos de partida, Montevideo, Palermo y Córdoba. Y efectivamente pude comprobar ésto.

En primer lugar averigué que los valores de la longitud de Montevideo y de Palermo, adoptados en el cálculo de la longitud de La Plata, son idénticos con los contenidos en la lista de posiciones geográficas que, hasta el año de 1913, se publicaba en la *Connaissance des Temps*. Como autores de determinación de la longitud se dan en ambos casos los nombres de Green y Davis.

Continuando la búsqueda, encontré en la edición para el año 1885 la siguiente nota, tan importante que transcribo :

« Toutes les longitudes de la côte orientale de l'Amérique du Sud entre la Guyane et le Paraguay, sur une étendue de mille lieues, pro-

venant des travaux hydrographiques de M. Mouchez, ont été augmentées en moyenne d'une seconde de temps pour les mettre d'accord avec les déterminations télégraphiques faites par la Mission américaine de MM. Green et Davis en 1878 et 1879.

« Voici la comparaison de ces nouvelles longitudes des points fondamentaux avec celles déterminées astronomiquement pendant les missions hydrographiques de M. Mouchez, de 1856 à 1863, et qui avaient été employées pour la construction des cartes de Brésil.

Lieux	Longitudes		Erreurs
	télégraphiques de MM. Green et Davis 1879	astronomiques de M. Mouchez 1856-1863	
Para Amazone, Brésil......	3h23m21s.04	3h23m18s.77	+2s.27
Pernambouco, Brésil......	2 28 48.77	2 28 47.57	+1.20
Bahia, Brésil	2 43 29.37	2 43 27.03	+2.34
Rio de Janeiro, Brésil	3 2 2.41	3 2 0.30	+2.11
Montevideo, Rio de La Plata	3 54 10.02	3 54 9.00	+1.02
Buenos Aires, Rio de La Plata	4 2 49.95	4 2 49.33	+0.62

« On a interpolé les corrections pour les positions des localités intermédiaires qui sont toutes reliées a ces points fondamentaux, soit par des relévements directs, soit à l'aide des chronomètres. »

Ya se ve que, por lo menos en la parte austral de esta lista, las observaciones astronómicas de Mouchez habían dado las longitudes casi exactas, y que el error de un segundo aproximadamente fué introducido por la nueva determinación telegráfica de Green y Davis. Pero la influencia de este error se extiende también sobre los puntos más boreales, lo que podemos deducir del informe publicado en *Comptes Rendus* 1884, página 882, del señor de Bernardières quien determinó, en 1883, la longitud de Valparaíso por diferencias telegráficas con Buenos Aires y con Panamá. Entre las dos determinaciones resultó solamente la pequeña diferencia de 0.28 segundos, de que sigue que también la longitud de Panamá, adoptada según las determinaciones de Green y Davis, debe contener el mismo error de más de un segundo, como la longitud de Buenos Aires.

Es claro que, desde 1883, este error entró también en la longitud de Valparaíso y de Santiago de Chile ; efectivamente he recibido noticias que también los astrónomos chilenos han observado un error correspondiente de sus longitudes. Es muy interesante que igual-

mente las longitudes chilenas, determinadas anteriormente por el astrónomo Moesta por el método de culminaciones lunares, fueron menores que los valores calculados por Bernardières.

Al determinar la longitud de Córdoba por conexión telegráfica con Buenos Aires y con Santiago este mismo error fué continuado, y de Córdoba vino otra vez a La Plata. Se comprende, pues, como las tres determinaciones de nuestra longitud, desde Montevideo, Buenos Aires y Córdoba, aunque bastante concordantes entre sí, pueden contener un error sistemático de un segundo.

Se comprende también que las demás longitudes sudamericanas, determinadas por conexiones con estos puntos fundamentales, resultaron erróneas, de manera que puede decirse, que todo el continente sudamericano está situado cerca de cuatrocientos metros al este de lo que hasta ahora hemos adoptado.

Sigue, por fin, que la hora oficial distribuída por los observatorios sudamericanos y calculada con falsos valores de longitud, fué errónea en el mismo sentido. En la República Argentina ya se ha corregido este error, transmitiéndose, desde el 1° de octubre, por las estaciones radiotelegráficas de Dársena Norte y de la Universidad de La Plata la hora calculada con el nuevo, exacto valor de la longitud.

Continuamos, en el Observatorio de La Plata, estas determinaciones de la longitud, y es probable que también otros observatorios efectuarán semejantes investigaciones, de manera que dentro de poco tiempo dispondremos, en nuestro continente, de una red de longitudes acertadas.

VUELOS

POR LUIS M. DINELLI

En publicaciones anteriores traté del vuelo planeado de los *Cathartes* y del vuelo aleteado lento del *Phoenicopterus* o Flamenco, buscando definir cómo se efectuaba el deslizamiento o vuelo.

Sabemos que son muchas las especies cuya forma de vuelo es digna de ser estudiada, pero, para ser breves, tomaremos unas cuantas partiendo del vuelo planeado del Catharte y llegando a terminar con el vuelo zumbido de algunos insectos.

Haremos, ante todo, una división escalonada de varios vuelos y primero, consideraremos el deslizamiento de las especies de vuelo planeado, efectuados sin aleteo, considerándolo como máximo absoluto de utilización de la presión alar sobre el extracto aéreo en que desliza : luego, los de las aves de aleteo lento, o sea de las aves de grande mole y de espaciosa superficie alaria; este vuelo es de utilización completa del aire relativa a su aleteo; pues hemos dicho que el aletazo en bajada debe producir una presión alar mayor que en el planeo y de esta manera el deslizamiento del ala sobre el extracto aéreo no puede ser total puesto que se introduce un esfuerzo mayor. Llegado a este punto es bueno hacer mención del *Cathartes atratus brasiliensis*. Esta especie está dotada de un plano alario menos extendido y de forma muy redondeada la que facilita el vuelo mixto, o sea aleteado y planeado.

A trasladarse muchos individuos volando horizontalmente a poca altura nos proporcionan una preciosa observación. Mientras un individuo adelanta planeando, a su lado va otro aleteando y veremos que ambos se trasladan a velocidad igual; pero en el que planea no se llega a notar un descenso, como en el otro que aletea, no se ve una ascensión.

Pasaré ahora a considerar un vuelo puramente aleteado-ligero, como ser el de unos icteridos.

El ala de estas especies está formada para el aleteo solamente, su

vuelo es veloz y resistente, la superficie alaria es reducida y la longitud del ala es mediana; los mástiles son fuertes y en el aleteo se produce una encurvadura de los mástiles muy pronunciada especialmente en las escapadas.

Ahora bien, si en el aleteo violento vemos una mayor curvatura en la extremidad del plano alario, bien visible a la vista del observador, es justo que se considere un mayor esfuerzo, o sea una mayor presión del plano alario sobre el aire. Entonces se tendrá que admitir que el deslizamiento del plano alario sobre el aire no es total, de suerte que tenemos que dividir en dos efectos el fenómeno vuelo : un deslizamiento del plano alario sobre el aire y un deslizamiento de aire contra el plano alario impuesto por elaletazo. Ambos deslizamientos son útiles para el vuelo, pero vemos que tiene lugar un desplazamiento pobre de aire hacia atrás, lo que no puede suceder en el vuelo planeado. Llegado a un desplazamiento pequeño del elemento aire se pasa a otros vuelos más inferiores.

Tomaremos los colibrís o picaflores cuyo vuelo o aleteo es tan frecuente que a veces llega a producir zumbido. Cuando el colibrí se detiene frente a una flor suspendido sobre el aleteo furioso de sus alas, toma una posición inclinada manteniendo una larga inmovilidad mediante un aleteo continuo, y claro está que en este caso no se produce ningún deslizamiento del plano alario sobre el aire, y sólo tiene que haber deslizamiento del aire hacia atrás provocado por la frecuencia del aleteo, de tal suerte que el sostén del cuerpo frente a la flor débese al desplazamiento del flúido aire oblicuamente en bajada de acuerdo a la posición de las alas, posición inmutable con relación al eje del cuerpo, y este desplazamiento de aire medido por la voluntad o necesidad del ave, se cambia por una absorción en el elemento que envuelve el cuerpo del colibrí.

Por cierto, cuando esta ave se traslada a otra planta cambia de hecho la forma de su vuelo y pasa a un aleteo lento de deslizamiento horizontal, disminuyendo el zumbido o anulándolo del todo, como puede notarlo el observador.

Otras aves de vuelo más inferior son unas especies de la familia de *hyláctidos*, que poseen alas muy cortas y redondeadas, con mástiles muy corvos y débiles. Son aves que viven en espesos matorales, de vuelo sumamente débil, siendo en cambio muy veloces. Obligados a volar lo efectúan siempre a muy poca distancia, mientras en el corto espacio recorrido emplean un aleteo muy esforzado, que produce un cansancio inmediato.

El furioso aleteo empleado y la poca velocidad adquirida nos da a comprender que el deslizamiento alario contra el aire es casi nulo, mientras el desplazamiento del flúido deberá ser mayor que en los otros vuelos menos aleteados y más ligeros. Tenemos que agregar que estas especies tienen un cuerpo cubierto de abundante plumaje, con una forma muy abultada en comparación de sus escasas alas.

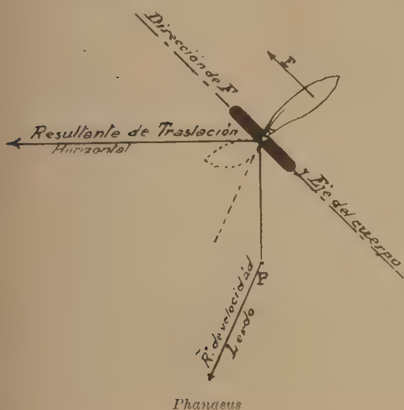
Así llegamos a la conclusión de que estos individuos se trasladan más por desplazamiento de aire que por deslizamiento.

Este vuelo lo llamaremos por ahora avance por absorción incompleta.

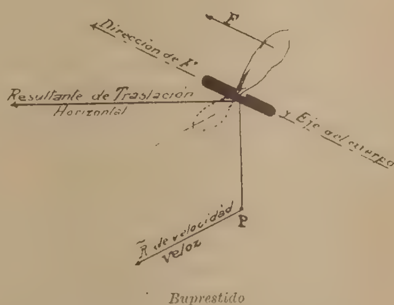
Vemos, pues, que entre el tranquilo planeo de los Cathartes y el vuelo esforzado de los hyláctidos debe haber un número infinito de sistemas de vuelos, que dejaremos a un lado por ser innecesaria su clasificación, y pasaremos en seguida a tratar del vuelo de algunos insectos, que no pueden clasificarse entre las formas deslizadoras.

Los Phanaeus son lamelicornias de forma abultada, casi cilíndrica, cuyos élitros, muy concávos no son adaptados por un deslizamiento. En el vuelo los elítros se abren apenas para dar lugar al aleteo, las alas son casi planas, articuladas en su tercio extremo y de escasa superficie.

El vuelo de este insecto es veloz y resistente, y con su aleteo produce un zumbido continuo ; la posición del cuerpo durante el vuelo es oblicua mientras el aleteo es normal al eje del cuerpo. Entonces la resultante de traslación, para que sea horizontal, está representada gráficamente por los siguientes esquemas :



Phanaeus



Buprestido

Inclinación del cuerpo en el vuelo de los insectos

Esta resultante de *p* y F demuestra claramente que de ninguna manera hay deslizamiento horizontal de alguna de las partes del cuerpo, por estar dispuesto todo en sentido negativo y que en su avance tendremos que suponer que se efectúa por un desplazamiento. Por la forma del ala del insecto Phanaeus se podría aplicar el principio de un doble deslizamiento de aire, uno con el aletazo de bajada y medio deslizamiento en la subida; pues es sabido que la forma rígida y plana del ala abierta en ambos movimientos tiene que oponer una fuerza y que con esta fuerza tendrá el ala que ceder en su resistencia oblicuándose alternativamente para dar escape favorable en el vuelo del aire que planea.

En efecto: cuando un *Phanaeus* está asentado al suelo entre hierbas o basuras, vemos que antes de deslizarse produce con violencia un barrido de todo detrito y arena, mientras el insecto se levanta lentamente hasta salir del ramaje que le impide trasladarse horizontalmente.

Deducimos, pues, que el movimiento se inicia con un desplazamiento del aire hacia atrás, y el cuerpo absorbido por el flúido así dilatado es llevado al nivel buscado o de salida.

Y si ponemos nuestra atención en observar un elatérido o un bupréstido, insectos éstos de forma navicular o alargada y que al emplear un aleteo violento apenas consiguen adelantar lentamente, se verá la forma de cruz dada por el cuerpo y los élitros semiabiertos o soliviados, es decir, de una forma también totalmente negativa al deslizamiento. Se deduce entonces que el traslado en el aire se produce por desplazamiento en la mayor parte de los insectos de forma caprichosa, maciza unos y desparramada otros.

Pero hay ápidos y dípteros cuya forma de alas, monopieza extendidas, es plana y rígida, y en sus aleteos, observados cuando se mantienen suspendidos en el aire sin adelantar, se puede apreciar el movimiento de las alas y la inclinación del cuerpo. Un fenómeno sólo produce la suspensión del individuo en el espacio en que no hay aire en movimiento, y este fenómeno debe ser forzosamente un desplazamiento de aire.

Estas alas, durante el aleteo, ofrecen su plano oblicuado a ambos movimientos, pues ceden a la presión del aire en los dos sentidos del aletazo, mientras el flúido escapa en deslizamiento hacia atrás, con valores diferentes por estar siempre en juego el peso del individuo. Hemos llegado, sin embargo, al caso de designar a este vuelo, vuelo de absorción completa o máxima.

Sobre el sonido resultante de los aletazos, lentos o furiosos, no se puede aplicar directamente la teoría de las notas musicales, pues los zumbidos no están de acuerdo con el número de aletazos dados, tanto en las aves como en los insectos. El mismo planeo suena como una hoja de sable si hiende el aire. El acero no vibra en este caso, pero el aire sí.

Las notas que percibimos o que notamos son debidas siempre a una subvibración producida en la extremidad posterior de todo miembro alario, vibración provocada por el aire al terminar su función alrededor del borde extremo de la superficie alaria, cualquiera que ella sea.

En cambio, si buscamos de apreciar los sonidos producidos por el aletazo de las aves nocturnas, como ser buhos o caprimúlgidos, nos encontramos que el vuelo de estas especies es silencioso debido a que en el borde posterior de sus alas hay un plumerito adicional donde el aire termina su función, sin poder vibrar contra un plumaje suave aterciopelado.

Se ve, pues, que la naturaleza da un vuelo silencioso al ave que necesita no ser oída en el silencio de la noche por la presa que es su alimento.

De todos modos, todos los vuelos demuestran la perfección de la naturaleza como constructora de alas.

No dejamos de lado entonces las disposiciones por ella enseñadas en la función del plano alario en el vuelo, se observa que el movimiento del plano alario sea en el aleteo, o en el deslizamiento del planeo, la presión está situada más que todo en el extremo de la superficie alar, o sea adonde el aire está tranquilo, que es la más alejada del cuerpo, pues éste en su traslación convulsiona el elemento en su rededor.

Todo individuo que planea tiene sus alas muy extendidas y mucha superficie alar alejada del cuerpo.

En las aves de planeo, durante sus vuelos se puede observar que los movimientos en las varias direcciones son efectuados sin alterar la forma del plano alario y la posición del cuerpo, que está dispuesta de tal manera que opone la menor resistencia al deslizamiento, mientras las velocidades, en las distintas direcciones, son variadas de acuerdo a la velocidad y a la dirección del viento. Claro está que las velocidades aparentemente cambiables a la vista del observador, no lo serán, sin embargo, con relación al aire en que deslizan.

Es interesante observar con un buen anteojo un Catharte en planeo, y comparar la hermosa forma del ave con ciertas figuras dibujadas en revistas o con malas preparaciones taxidérmicas que fueron fotografiadas suspendidas desde un techo y enfocadas de una ventana, pretendiendo hacerlas pasar por aves sorprendidas en vuelo, resultando éstos malos gráficos para el estudio del planeo.

SUCESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS DE ORDEN SUPERIOR

Por JOSÉ S. CORTI

En la *Revista de Matemáticas y Física Elementales,* año II (1920-21), páginas 217 a 219, vió la luz pública, bajo mi firma, un pequeño trabajo, en el cual hice notar la íntima correlación existente entre las progresiones aritméticas y las geométricas, en virtud de cuya correlación a toda propiedad que en las progresiones aritméticas depende de una suma, resta, multiplicación o división, corresponde, en las geométricas, una propiedad que depende de una multiplicación, división, elevación a potencia o extracción de raíz, respectivamente.

Posteriormente he visto que esta correlación no sólo existe entre las progresiones, o sucesiones de primer orden, sino también entre las sucesiones aritméticas y geométricas de orden superior, como lo verificará el lector recorriendo las líneas que siguen.

Si en una sucesión dada se forma *la diferencia entre cada término y el que le precede,* se obtendrá una nueva sucesión, cuyos términos pueden, o no, ser todos iguales.

Si no lo son, la segunda sucesión se tratará como la primera, y *las diferencias sucesivas* formarán una tercera sucesión, cuyos términos pueden, o no, ser todos iguales.

Si después de haber repetido igual operación un número n de veces, se llega a una sucesión de *diferencias todos iguales,* la sucesión primitiva constituye una *sucesión aritmética* de orden n.

Si en una sucesión dada se forma *el cuociente de cada término y el que le precede,* se obtendrá una nueva sucesión, cuyos términos pueden, o no, ser todos iguales.

Si no lo son, la segunda sucesión se tratará como la primera, y *los cuociente sucesivos* formarán una tercera sucesión, cuyos términos pueden, o no, ser todos iguales.

Si después de haber aepetido igual operación un número n de veces, se llega a una sucesión de *cuocientes todos iguales,* la sucesión primitiva constituye una *sucesión geométrica* de orden n.

Consideremos una *sucesión aritmética* de tercer orden, en la cual el primer término es a, es b *la primera diferencia primera*, es c *la primera diferencia segunda*, y d cada una de las *diferencias terceras*, todas iguales.

Si partimos de *las diferencias* constantes d, podremos formar el cuadro :

I	II	III	IV
			a
		b	
	c		$a+b$
d		$b+c$	
	$c+d$		$a+2b+c$
d		$b+2c+d$	
	$c+2d$		$a+3b+3c+d$
d		$b+3c+3d$	
	$c+3d$		$a+4b+6c+4d$
d		$b+4c+6d$	
	$c+4d$		$a+5b+10c+10d$
d		$b+5c+10d$	
	$c+5d$		$a+6b+15c+20d$
		$b+6c+15d$	
			$a+7b+21c+35d$

Vemos, así, que los términos de col. III, II y I son las *diferencias sucesivas* de los términos de col. IV, III y II ; y es evidente la ley de formación de los términos de estas últimas :

El término general de I es d;

El de II es $c+(n-1)\,d$;

El de III es

$$b+(n-1)\,c+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\,d;$$

El de IV es

$$a+(n-1)\,b+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\,c+\frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)}{2\,.\,3}\,d;$$

Consideremos una *sucesión geométrica* de tercer orden, en la cual el primer término es a, es b *el primer cuociente primero*, es c *el primer cuociente segundo*, y d cada uno de los *cuocientes terceros*, todos iguales.

Si partimos de *los cuocientes* constantes d, podremos formar el cuadro :

I	II	III	IV
			a
		b	
	c		ab
d		bc	
	cd		ab^2c
d		bc^2d	
	cd^2		ab^3c^3d
d		bc^3d^3	
	cd^3		$ab^4c^6d^4$
d		bc^4d^6	
	cd^4		$ab^5c^{10}d^{10}$
d		bc^5d^{10}	
	cd^5		$ab^6c^{15}d^{20}$
		bc^6d^{15}	
			$ab^7c^{21}d^{35}$

Vemos, así, que los términos de col. III, II y I son los *cuocientes sucesivos* de los términos de col. IV, III y II ; y es evidente la ley de formación de los términos de estas últimas :

El término general de I es d;

El de II es $c\,.\,d^{(n-1)}$;

El de III es

$$b\,.\,c^{(n-1)}d^{\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}};$$

El de IV es

$$a\,.\,b^{(n-1)}c^{\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}}\,d^{\frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)}{2\,.\,3}};$$

y la sucesión de col. IV es, precisamente, *la aritmética* de 3er orden, caracterizada por los valores a, b, c y d.

Si quisiéramos *la suma* de n términos de IV, ella nos sería dada por

$$S_n = na + \frac{(n-1)\,n}{2}\,b + \frac{(n-2)\,(n-1)\,n}{2\,.\,3}\,c + \frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n}{2\,.\,3\,.\,4}\,d.$$

y la sucesión de col. IV es, precisamente, *la geometría* de 3er orden, caracterizada por los valores a, b, c y d.

Si quisiéramos *el producto* de n términos de IV, él nos sería dado por

$$P_n = a^n\,.\,b^{\frac{(n-1)\,n}{2}}\,c^{\frac{(n-2)\,(n-1)\,n}{2\,.\,3}} \times d^{\frac{(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n}{2\,.\,3\,.\,4}}.$$

Hasta aquí había llegado en mi paralelo entre las sucesiones de ambas especies, cuando el doctor Baidaff, con quien cambiara ideas respecto de este tema, tuvo la gentileza de hacerme notar que la comparación puede llevarse aun más lejos, como se verá a continuación.

El término general de cualquiera de las sucesiones II, III, IV puede escribirse en la forma

$$A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + \ldots$$

en que A, B, C, D... son funciones de a, b, c, d...

En particular se tiene, para la sucesión de tercer orden

$$S_n = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4,$$

en que

$$A = 0,$$

$$B = a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{4}d,$$

$$C = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{11}{24}d,$$

$$D = \frac{1}{6}c - \frac{1}{4}d,$$

$$E = \frac{1}{24}d.$$

El término general de cualquiera de las sucesiones II, III, IV puede escribirse en la forma

$$A\,.\,B^n C^{n^2} D^{n^3} \ldots$$

en que A, B, C, D... son funciones de a, b, c, d...

En particular se tiene, para la sucesión de tercer orden

$$P_n = A\,.\,B^n C^{n^2} D^{n^3} E^{n^4},$$

en que

$$A = 1,$$

$$B = \frac{ac^{1/3}}{b^{1/2}d^{1/4}},$$

$$C = \frac{b^{1/2}d^{11/24}}{c^{1/2}},$$

$$D = \frac{c^{1/6}}{d^{1/4}},$$

$$E = d^{1/24}.$$

MEMORIA ANUAL

DEL PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
Ingº EDUARDO HUERGO

CORRESPONDIENTE AL QUINCUAGÉSIMO CUARTO PERÍODO ADMINISTRATIVO
(1º DE ABRIL DE 1926 A 31 DE MARZO DE 1927)
LEÍDA EN LA ASAMBLEA DEL 8 DE ABRIL DE 1927

Señores consocios:

En cumplimiento de lo que establece el Reglamento social vigente, en su artículo 19, inciso 9°, me es grato dar cuenta a esta Asamblea de la marcha de la Sociedad durante el 54° ejercicio administrativo (1° de abril de 1926 a 31 de marzo de 1927).

JUNTA DIRECTIVA

En la última Asamblea ordinaria, efectuada el 14 de abril de 1926, integrada la Junta directiva de acuerdo con lo que establece el artículo 13 del Reglamento, ésta quedó constituída del siguiente modo:

Presidente : Ingeniero Eduardo Huergo, para completar el período de dos años ;

Vice-presidente 1° : Doctor Nicolás Lozano, elegido por el período de dos años ;

Vice-presidente 2° : Doctor Emilio C. Díaz, para completar el período de dos años ;

Secretario de actas : Ingeniero Juan José C. Mosca, elegido por el período de dos años ;

Secretario de correspondencia : Ingeniero Anecto J. Bosisio, para completar el período de dos años ;

Tesorero : Ingeniero Edmundo Parodi, elegido por el período de dos años ;

Pro-tesorero : Ingeniero Emilio Mallol, para completar el período de dos años;

Bibliotecario : Ingeniero Nicolás Besio Moreno, elegido por el período de dos años;

Vocales : Arquitecto Carlos E. Géneau, capitán de navío Segundo R. Storni, ingeniero Enrique Marcó de Pont, doctor Abel Sánchez Díaz, elegidos por el período de dos años, e ingeniero Enrique Sabaría, ingeniero Pedro Aguirre, ingeniero Juan A. Briano, doctor Lucio D'Ascoli, para completar el período de dos años.

La Junta directiva ha funcionado regularmente efectuando 21 sesiones durante el ejercicio. De sus principales acuerdos y actuaciones consiguientes paso a hacer una ligera reseña :

— Adhesión a los actos organizados en homenaje a Marcelino Berthelot con motivo del centenario de su natalicio.

— Adhesión al 6° Congreso de química industrial de Bruselas.

— Adhesión al 6° Congreso internacional de filosofía de Nueva York, en el que la Sociedad ha sido representada por el decano de la Facultad de filosofía y letras de Buenos Aires, doctor Coriolano Alberini.

— Visita al diario de esta capital *La Prensa.*

— Participación en el homenaje póstumo al doctor Horacio G. Piñero.

— Adhesión al 2° Congreso internacional de historia y geografía de América celebrado en la Asunción (Paraguay).

— Visita al frigorífico « La Blanca ».

— Participación en el homenaje a la memoria del ingeniero Otto Krause.

— Adhesión al homenaje patrocinado por el Ateneo de la Juventud de Arequipa (Perú) en honor del doctor Edmundo Escomel, socio correspondiente de la Sociedad Científica Argentina, para cuyo acto fué designado para representar a la Sociedad el doctor Felipe Urquieta.

— Impresión del catálogo de revistas, obra del exbibliotecario doctor Reinaldo Vanossi.

— Concurrencia al homenaje tributado a la memoria del doctor Felipe Basabilvaso.

EDIFICIO SOCIAL

En la memoria anual correspondiente al ejercicio anterior, ya di cuenta a los señores consocios de la aprobación acordada por el Poder Ejecutivo, al proyecto definitivo preparado por la Dirección general de Arquitectura (Ministerio de Obras Públicas) por Decreto del 19 de enero de 1926, sobre la base del proyecto del ingeniero Oscar Schoo Lastra.

Debo agregar ahora, que por resolución ministerial del 17 de junio de 1926, fueron aprobadas las bases de licitación, pliego de condiciones y presupuesto por valor de 200.176,87 pesos moneda nacional por obras de albañilería, revoques (interiores y exteriores), marcos de madera dura, esqueletos metálicos y de hormigón armado, embaldosado de azotea y terraza, desagües pluviales y encañados para las instalaciones sanitarias y eléctrica. Que autorizada la repartición citada a licitar dichas obras, así lo hizo, resultando adjudicataria la firma M. Grillo e hijo, de esta plaza, quien se compromete a ejecutarlas en la suma de 162.221,73 pesos moneda nacional. Dicha adjudicación fué aprobada por Decreto de octubre de 1926, en el que se estableció, además, que para atender tales trabajos existen los siguientes créditos autorizados: anexo L, inciso 1°, ítem 9, partida 56 de las leyes de presupuesto de 1923 a 1925 inclusive (ley 10285) total 200.200 pesos moneda nacional y ley 11333 anexo L, inciso 1°, ítem 8, partida 2: 200.000 pesos moneda nacional lo que forma un total de 400.200 pesos moneda nacional, no obstante la opinión contraria, vertida por el señor procurador del tesoro, respecto a la caducidad de alguno de dichos créditos. Es ésta una demostración más de la excepcional buena voluntad del Poder Ejecutivo hacia nuestra institución, que no puedo menos de dejar remarcada en esta circunstancia y que los señores socios han de apreciar en todo su valor.

Contratadas las obras, impartióse la orden de comienzo desarrollándose éstas normalmente; y a la fecha, terminado el desmonte y la excavación para cimientos, se trabaja en la mampostería de cimentación.

La repartición aludida, tiene a su cargo la inspección y dirección de la obra, que ha sido considerada como pública, a tal efecto, por lo que puede descontarse un serio contralor en la ejecución de los trabajos; además, atenderá el cálculo de las estructuras, la preparación de los detalles y demás elementos que la obra requiera, en el curso de su ejecución.

Es justiciero señalar el reconocimiento que la Sociedad debe a la Dirección general de Arquitectura y al ingeniero Oscar Schoo Lastra, gracias a los cuales podrá, en época no muy lejana, verse realizado el anhelo general de los señores socios.

ANALES

Lo mismo que en años anteriores la dirección de nuestros *Anales* ha estado a cargo del ingeniero Julio R. Castiñeiras, quien ha seguido prestándole la atención y actividad de que tiene dado repetidas pruebas en el desempeño de tan importante cometido. Durante este período han sido editadas las siguientes entregas:

Tomo 100, entrega trimestral, meses de octubre, noviembre y diciembre de 1925.

Tomo 101, íntegro.

El material de estas entregas ha incluído las siguientes colaboraciones:

Francisco Pingsdorf, *Investigaciones modernas sobre geometría compleja en el plano real.*

Juan W. Gez, *Historia de la minería en la provincia de San Luis.*

Ottomar Schmiedel, *Movimiento de agua por canales y tubos y cálculo de ellos.*

Arthur Mac Donald, *Numerical estimates of historial events.*

Ottomar Schmiedel, *Del Sol y de la Tierra.*

Guillermo Hoxmark, *El gran temporal de nieve del 28 al 31 de agosto de 1923.*

José Aramburo, *Determinación de longitudes geográficas mediante el empleo de la radiotelegrafía. Su primera aplicación técnica en el país.*

Antonio Pauly, *Ensayo de una cosmogenia basada en las leyes más recientes de la física.*

Alfredo Gelodi, *Procedencia del suelo argentino de Posadas (Misiones).*

Juan M. López, *Estudio espectrofotométrico de la adrenalina.*

Alfredo Gelodi, *Misiones. Sus cultivos de yerba mate y tabaco.*

J. C. Vignaux, *Sobre las series divergentes sumables.*

W. G. Phillipps, *El control y la administración de la industria pesquera. Un proyecto ideal.*

MOVIMIENTO DE SECRETARÍA

Las secretarías de actas y de correspondencia han estado a cargo de los ingenieros Juan José C. Mosca y Anecto J. Bosisio, respectivamente, quienes han atendido y despachado todos los asuntos resueltos por la Junta directiva en las 21 sesiones realizadas durante el período, redactándose 205 notas cuyas copias figuran en los libros de secretaría.

Las comunicaciones pasadas por la Gerencia alcanzan a la cifra de 205, que agregada a la anterior, hace un total general de 410 notas.

MOVIMIENTO DE TESORERÍA

El movimiento de socios ha sido el siguiente:

	Activos	Adherentes
En 31 de marzo de 1926 los socios eran...........	337	32
Han ingresado durante el período................	9	2
Totales	346	34
Se han eliminado por diferentes causas...........	50	10
Quedan en 31 de marzo de 1927.................	296	24

Los socios ingresados durante el período fenecido son los siguientes:

Activos: ingeniero Aquiles Armani, señor Ludovico Cavandoli, profesor Juan W. Gez, profesor Zoilo Kohan, ingeniero Antonio Pauly, doctor Alberto A Perazzo, ingeniero Blas Angel Repetto, doctor Hugo Salomón y doctor Carlos Wenzel.

Adherentes: Señor José Bazzanella y profesor José Liebermann.

Durante el período, la Sociedad ha tenido que lamentar el fallecimiento de los siguientes socios: doctor Carlos Spegazzini (honorario), doctor Eduardo Sarmiento Laspiur, ingeniero Oronte A. Valerga, ingeniero Miguel Olmos, ingeniero Antonio Orús, ingeniero Andrés B. Novillo (activos), a quienes se les tributó en su oportunidad el correspondiente homenaje.

La Sociedad ha contado desde su fundación con 23 socios honorarios, habiendo fallecido de ellos los 17 primeros de la nómina total que es la siguiente: doctor Pedro Visca, doctor Mario Isola, doctor Germán Burmeister, doctor Benjamín A. Gould, doctor R. A. Philippi, doctor Guillermo Rawson, doctor Carlos Berg, doctor Valentín Balbín, doctor Florentino Ameghino, doctor Carlos Darwin, doctor César Lombroso, ingeniero Luis A. Huergo, ingeniero Vicente Castro, doctor Juan J. J. Kyle, doctor Estanislao S. Zeballos, ingeniero Santiago E. Barabino, doctor Carlos Spegazzini, doctor Walther Nernst, doctor Eduardo L. Holmberg, ingeniero J. Mendizábal Tamborel, ingeniero Guillermo Marconi, doctor Enrique Ferri, doctor Alberto Einstein.

Los socios correspondientes son 71.

En resumen, los socios con que cuenta actualmente la Sociedad son los siguientes:

Honorarios	6
Correspondientes	71
Activos	296
Adherentes	24
Protectores de la organización didáctica de Buenos Aires	2
Total	399

DEMOSTRACIÓN DE LA CUENTA DE GANANCIAS Y PÉRDIDAS

Debe

Anales	7.892.88
Gastos generales	3.692.51
Sueldos	9.330.00
Comisiones	1.401.75
Monografías	9.85
Gastos de biblioteca	1.266.45
Donativos	189.67
Suma total	23.783.11

Haber

Cuotas de socios	8.926.00
Subsidios	10.820.00
Intereses	574.06
Suma	20.320.06
Saldo pérdida para igualar	3.463.05
Suma total	23.783.11

RESUMEN DEL AÑO ECONÓMICO 1926-1927

Activo

Biblioteca		152.412.41
Edificio social		41.893.78
Muebles y útiles		24.192.00
Recibos al cobro (cobrador)		5.364.00
Banco de la Nación		4.512.41
Caja		243.43
Títulos Deuda externa de la Prov. de Buenos Aires		227.27
Cédulas argentinas (2ª serie)		3.648.00
— (18ª serie)		1.442.10
Certificados municipales		3.290.70
Deudores varios :		
Junta nacional aplicaciones científicas	186.23	
Cincuentenario de la Sociedad	981.43	
Nuevo edificio social	400.10	1.567.76
Suma		238.793.86
Saldo pérdida para igualar		3.463.05
Suma total		242.256.91

Pasivo

Capital		234.507.86
Acreedores varios :		
Organización didáctica de Buenos Aires..	4.019.05	
Acciones Edificio social	3.730.00	7.749.05
Suma total		242.256.91

Buenos Aires, marzo 31 de 1927.

J. J. C. Mosca. — A. J. Bosisio,
Secretarios.

E. Parodi,
Tesorero.

Vº Bº.

E. Huergo,
Presidente.

BIBLIOTECA

La incansable actividad del doctor Reinaldo Vanossi, designado por la Junta directiva para ejercer el cargo de bibliotecario en ausencia del titular, ingeniero Nicolás Besio Moreno, ha seguido contribuyendo de modo muy apreciable al enriquecimiento y organización de la biblioteca social. De ello dan testimonio el considerable número de claros que ha conseguido llenarse en las colecciones de revistas existentes, la cantidad de nuevos canjes obtenidos y la confección del Catálogo de Revistas, por él llevada a cabo, tarea en que venía empeñado de tiempo atrás. Entre los números atrasados que nos faltaban en nuestras colecciones de revistas, obtenidos a título de canje con los *Anales*, merecen especial mención los siguientes :

Maine Agriculture Experiment Station, University of Maine : los números correspondientes a los años 1912 a 1926.

Bulletin de l'Academie des Sciences de Russie : números correspondientes a los años 1923 a 1925.

Atti della Accademia Roveretana degli Agiati, Rovereto, Italia : números correspondientes a los años 1905 a 1924.

Societé Russe de Geographie, Leningrado : números correspondientes a los años 1913 a 1925.

Verhandlungen des Naturhistorischen der Preufsischen Rheinlande und Westfalens, Bonn-Alemania : números correspondientes a los años 1905 a 1922.

Academie des Sciences et des Lettres de Oslo, Noruega : *Den Norske Nor-*

dhaus Expedition 1876-1878 : volúmenes I a XXVIII ; *The Norwegian North Polar Expedition 1893-1896 :* volúmenes I a VI ; *Report of the Secon Norwegian Artic Expedition en the « Fram » ; The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902-1903 :* volumen I.

Studi Sassaresi de la Università de Sassari : números correspondientes a los años 1922 a 1926.

En concepto de compra se han hecho también importantes adquisiciones, de las que citaremos las siguientes :

Gazzetta Chimica Italiana : números correspondientes a los años 1920, 1923 a 1925.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo : tomos XXXVII a XLVIII, que corresponden a los años 1914 a 1924.

Boletín del Observatorio del Ebro, Tortosa, España : tomos V a XV, correspondiente a los años 1914 a 1924.

Además de las publicaciones que quedan detalladas, nuestra biblioteca se vió también favorecida por una importante donación de obras y revistas recibida del Centro Nacional de Ingenieros de esta Capital.

Canjes nuevos

The Chemical Technology, de Kiriu (Japón), *Técnica. Revista Tecnológica Industrial,* de Barcelona (España), *Section Entomologique du Museum National de Prague* (Checoeslovaquia), *Institute Botanique de l'Université Charles,* de Prague (Checoeslovaquia), *Ecology,* de Brooklyn, New York (Estados Unidos), *Philippine Journal of Science,* de Manila (Filipinas), *National Research Council of Japan,* de Tokyo (Japón), *Royal Society of Edinburg* (Escocia), *Bulletin. The Chemical Society of Japan,* de Tokyo (Japón). *Museo de Historia Natural,* de Montevideo (Uruguay), *Institut Central de Tabac,* de Krasnodar (Rusia), *Folia Neuropathologica Estoniana,* de Tartu-Dorpart (Estonia), *Preufsiche Akademie der Wissenschaften,* de Berlín (Alemania), *Helvetica Chimica Acta. Institut de Chimie,* de Bale (Suiza), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* de Leipzig (Alemania), *Revista Matemática Hispano-Americana,* de Madrid (España), *Revista de la Escuela de Ciencias Médicas y Centro Estudiuntes de Medicina de La Plata* (Buenos Aires), *Ibero-amerikanisches Forschungsinstitut,* de Bonn (Alemania), *Department of Commerce Bureau of Standards,* de Wáshington (Estados Unidos), *Revista de Zootechnia e Veterinaria. Servicio de Industria Pastoril,* de Río de Janeiro (Brasil), *Bulletin Dominion Museum,* de Wellington (Nueva Zelandia), *Agriculture Institute,* Omks, de Moscou (Rusia), *Acta Horti Botanici,* de Riga (Letonia), *Revista de la Federación Rural,*

de Montevideo (Uruguay), *Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, de Napoles (Italia), *College of Science de la Kyoto Imperial University*, de Kyoto (Japón), *Acta Horti Gothoburgensis*, de Göteborg (Suecia), *Societé des Amateurs des Sciences Naturelles, d'Anthropologie et d'Ethnographie*, de Moscou (Rusia), *Musee d'Etat de la province de Moscou* (Rusia), *Societé Hollandaise des Sciences*, de Haarlem (Holanda), *Museo Zoológico de la Universidad de Coïmbra* (Portugal), *Bibliotheque de l'Université de l'Etat de l'Asie Centrale*, de Moscou (Rusia), *Sociedad Entomológica Argentina* (Capital), *Université de Montreal, Laboratoire de Botanique* (Canadá), *Instituto de Criminología*, de Lisboa (Portugal), *Musée d'Ethnographie et d'Anthropologie de l'Academie des Sciences de l'U. S. S. R.*, de Leningrad (Rusia), *The Society of Naval Architects and Marine Engineers*, de New York (Estados Unidos), *Boletín de Informaciones Petrolíferas* (Capital), *The New York Public Library*, de New York (Estados Unidos), *Narodna Starina (Antiquités Nationales)*, de Zagreb (Yougoslavia).

Canjes reiniciados

Societé d'Anthropologie de Paris (Francia), *Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona* (Italia), *Leopoldina Berichte der Kaiserlich Deutschen Akademien der Naturforscher, zu Halle* (Alemania), *Academia das Sciencias*, de Lisboa (Portugal), *Societé des Naturalistes*, de Moscou (Rusia), *Annuaire de l'Université Laval*, de Quebec (Canadá), *Denison University*, de Granville, Ohio (Estados Unidos), *Studi Sassaresi de la Universitá di Sassari* (Italia).

Canjes suspendidos

Societé de Chimie Industrielle, de París (Francia).

La nómina de los libros y folletos recibidos durante el período comprendido entre el 1° de abril de 1926 a 31 de marzo de 1927, es la siguiente:

Roberto Levillier, *El Perú y el Tucumán en los tiempos prehispánicos*, 80 páginas, Librería Rosay, Lima (Perú), 1926.

Carlos A. Marelli, *Normas para la obtención bioestadística de las variaciones de los caracteres en diferentes especies vegetales*, 337 páginas, Coni, Buenos Aires, 1926.

Adolf. Söderström, *Das problem der Polygordius-Endolarve*, 177 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryc., Uppsala, 1924.

Ministerio de Marina, *Apéndice al derrotero Argentino. Río de la Plata; ríos Paraná, Paraguay y Uruguay*, 117 páginas, Buenos Aires, 1926.

Ernesto Baldassari, *Vías navegables y puertos de la República Argentina*, 204 páginas, Talleres gráficos del Ministerio de Obras Públicas, Buenos Aires, 1925.

IVe Congrés de Chimie Industrielle, *Chimie & Industrie,* 647 páginas, Imp. de Vaugirard, H. L. Motti, París, 1925.

Ministerio de Marina, *Tablas de mareas para 1927,* 279 páginas, Talleres gráficos del M. de Marina, Buenos Aires, 1927.

Charles Callet, *Mystere du langage. Les sons primitifs et leurs évolutions,* 102 páginas, Lafolye Frères, París, 1926.

Carnegie Endowment for International Peace, *Year book 1925 y 1926,* 2 tomos, 431 páginas, The Endowment, Wáshington, 1925 y 1926.

Juan Pedro Paz Soldán, *Diccionario biográfico de Peruanos contemporáneos,* 439 páginas, Gil, Lima (Perú), 1917.

Joao María de Almeida Lima, *O clima de Portugal Continental,* 81 páginas, Imprenta Nacional, Lisboa, 1922.

P. Weiss et Föex G., *Le Magnétisme,* 215 páginas, Armand Collin, París, 1926.

Lorenzo López, *Estadística General de la Repúbliea del Salvador,* 240 páginas, Imprenta Nacional, El Salvador, 1926.

H. Fändrich, *Guía del viajero en Alemania. Manual,* 179 páginas, Hans Fändrich, Buenos Aires, 1926.

Fritz Frech, *Geología. Volcanes, estructuras de las montañas, temblores de tierra,* 304 páginas, Editorial Labor, Barcelona.

Wilhelm Trabert, *Meteorología,* 146 páginas, Editorial Labor, Barcelona, 1926.

H. Lüscher, *Fotogrametría,* 167 páginas, Editorial Labor, Barcelona, 1926.

Antonio Colbacchini, *I Bororos Orientali «Orarimugudoge» del Matto Grosso (Brasile),* 205 páginas, Società editrice Internazionale, Torino.

Segundo Congreso de la Unión Industrial Argentina, *Memoria General,* 452 páginas, Caracciolo y Plantié, Buenos Aires, 1925.

Alfredo J. Torcelli, *Obras completas y correspondencia científica de Florentino Ameghino. Paraná y Monte Hermoso,* 521 páginas, Taller de impresiones oficiales, La Plata, 1916.

Bertrand de Fontvioland, *Résistence des Matériaux. Analytique et Graphique,* 728 páginas, J. B. Bailliere et fils, París, 1927.

A. Rateau, D. Eydoux et M. Gariel, *Turbines Hydrauliques,* 692 páginas, J. B. Bailliere et fils, París, 1926.

Pedro I. Caraffa, *Contribución italiana al desarrollo intelectual en la República Argentina. Ensayo histórico-biográfico,* 80 páginas, Olivieri y Domínguez, La Plata, 1926.

Sociedad de las Naciones, *La obra de la Sociedad de las Naciones. Enero 1920-junio 1925,* 109 páginas, Artes de la Ilustración, Madrid.

Union Géographique Internationale, *Congrés International de Géographie.*

Le Caire, avril 1925, tomo V, 212 páginas, Soc. Royale de Geog. d'Egypte, 1926.

National Research Council, *International critical tables of numerical data Physics, Chemistry and Technology,* 415 páginas, New York, 1926.

Demetrio Krinin, *Text-Book on Highway Engineering,* 643 páginas, Moscou, 1926.

U. S. Naval Observatory, *Observations made with the prime vertical transit instrument, 1893-1912,* 416 páginas, Government Printing Office, Wáshington, 1926.

L. Garrigue, *Origine des Univers et de la Vie,* 261 páginas, J. B. Bailliere, París, 1927.

A. Véronnet, *Constitutions & Evolution de l'Univers,* 475 páginas, Gaston Doin et Cie., París.

Obras Sanitarias de la Nación, *Memoria del Directorio correspondiente al año 1925,* 432 páginas, Imp. Obras Sanitarias de la Nación, Buenos Aires, 1926.

C. Gutton, *Radiotechnique Générale,* 563 páginas, J. B. Bailliere, París, 1926.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Repertorio de los Documentos Históricos procedentes del Archivo de Indias,* editados en los años 1918, 1919, 1920 y 1921, bajo la dirección de don Roberto Levillier, 142 páginas, S. A. Rivadeneyra, Madrid, 1921.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Gobernación del Tucumán,* tomo II, 624 páginas, S. A. Rivadeneyra, Madrid, 1920.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Gobernación del Tucumán,* segunda parte, 493 páginas, Juan Pueyo, Madrid, 1920.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Gobernantes del Perú,* 5 tomos, 2980 páginas, Juan Pueyo, Madrid, 1921-1924.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Organización de la Iglesia,* 2 tomos, 1066 páginas, S. A. Rivadeneyra, Madrid, 1919.

Biblioteca del Congreso Nacional, *Audiencia de Lima,* 3 tomos, 1496 páginas, Juan Pueyo, Madrid, 1922.

Pedro Belou, *Conferencias y discursos durante diez años de actuación universitaria, 1914-1924,* 238 páginas, Imp. « Oceana », Buenos Aires, 1924.

Juan A. Briano, *Ferrocarril Intercontinental Panamericano. Sus nuevas orientaciones. Ferrocarril Internacional Americano,* 50 páginas, Talleres gráficos guía « Expreso », Buenos Aires, 1919.

Juan A. Briano, *Modificación de las líneas del Ferrocarril Central Argentino en la ciudad de Buenos Aires,* 27 páginas, Buenos Aires, 1915.

Juan A. Briano, *Proyecto de ubicación del Mercado General de Ganado con acceso de las tres trochas de ferrocarriles,* 40 páginas, Buenos Aires, 1917.

Juan A. Briano, *Acceso de los Ferrocarriles del Estado a la Capital Federal, etc.,* 35 páginas, Escuela Tipográfica del Colegio León XIII, Buenos Aires, 1923.

S. Venturi, *Supercherías Spegazzinianas o Palos y más palos,* 46 páginas, Imprenta M. Violetto, Tucumán, 1925.

Ramón G. Loyarte, *La estructura del átomo. Estado actual de la cuestión,* 63 páginas, Tomás Palumbo, Buenos Aires, 1925.

Guillermo Hoxmark, *La aviación y la meteorología,* 13 páginas, Ministerio de Agricultura de la Nación, Buenos Aires 1924.

Erik Asplund, *Floran inom garphytte nationalpark,* 35 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A. B., Stockholm, 1925.

José Babini, *Sobre la Interpolación lineal,* 10 páginas, Madrid, 1926.

A. A. Romero, *La explotación del petróleo en el Neuquén,* 16 páginas, *El Diario,* Buenos Aires, 1926.

Carlos E. Porter, *Los estudios malacológicos en Chile,* 14 páginas, Santiago (Chile), 1926.

E. Escomel, *Leishmaniose américaine des sinus frontaux. Traitement favorable par l'iodure double de quinine et bismuth,* 6 páginas, Masson & Cie., París, 1925.

E. Escomel, *Batraciens conservateurs et propagateurs de certaines flagelloses intestinales de l'homme,* 5 páginas, Masson & Cie., París, 1925.

E. Escomel, *Une dermatite climatérique la Chapetonada,* 7 páginas, Masson & Cie., París, 1926.

Edmundo Escomel, *Termas minerales de Yura,* 32 páginas, Tipografia Cuadros, Arequipa (Perú), 1926.

E. Escomel, *Un nouveau Pseudo-Méloide insecte médicinal du Pérou,* 4 páginas, Masson & Cie., París, 1926.

J. Blanco Villalta, *« Noruega » el país de los Fiords. « Oslo » y sus museos,* 23 páginas, Steenske Boktrykeri Joannes Bjornstad, Oslo, 1926.

Lorenzo R. Parodi, *Las malezas de los cultivos en el partido de Pergamino,* 171 páginas, Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1926.

Homenaje del profesor doctor Samuel de Madrid, 67 páginas, Jacobo Peuser, Buenos Aires, 1927.

Miguel Artigas, *Comedia nueva en chanza. El comendador de Ocaña,* 28 páginas, J. Martínez, Santander, 1926.

C. Pérez Bustamante, *Notas de arqueología prehistórica galaica. Los dólmenes de Dombate y de la Gándara (Coruña),* 49 páginas, J. Martínez, Santander, 1924.

La Provincia de Buenos Aires. Su estado social y económico presente y perspectiva para su futuro, 90 páginas, Taller de Impresiones oficiales, La Plata, 1926.

C. W. Oseen, *Samuel Klingenstiernas Levnad och Verk,* 69 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A. B., Stockholm, 1925.

Eugenio Gley, *Curso de Fisiología,* 87 páginas, México, 1925.

Manuel Barros, *Ciperáceas argentinas,* 29 páginas, Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1925.

Roberto Levillier, *El descubrimiento del norte argentino*, etc., 69 páginas, Librería francesa Rosay, Lima (Perú), 1925.

Frank L. Soler, *Contribución al conocimiento de las funciones del bazo*, 25 páginas, Imprenta Mercatali, Buenos Aires, 1926.

Manuel Velasco de Pando, *Memoria sobre la elasticidad y resistencia de las piezas prismáticas, cuyo eje es una curva plana, cargadas normalmente a su plano*, 26 páginas, Estrada Hnos., Madrid, 1917.

Enrique C. Clos, *Leguminosas forrajeras de la flora argentina*, 16 páginas, Talleres gráficos del Ministerio de Agricultura, Buenos Aires, 1926.

Alfredo Trombetti, *La lingua dei Bororos-Orarimugudoge*, 60 páginas, Società Editrice Internazionale, Torino.

Juan A. Briano, *Acceso de los Ferrocarriles del Estado a la Capital Federal*, 38 páginas, Jacobo Peuser, Buenos Aires, 1920.

Ministerio de Marina, *Registro de la Escuela Naval Militar 1920-1925*, 80 páginas, Imprenta de la Escuela Naval, Río Santiago, 1926.

Mensaje dirigido a la Asamblea Nacional de El Salvador por el señor presidente de la República, doctor Alfonso Quiñonez Molina, 33 páginas, Imprenta Nacional, El Salvador, 1926.

Biblioteca Obrera, *Memoria del XXVIII° ejercicio correspondiente al año 1925*, 22 páginas, Imprenta Sindical de la Federación Gráfica, Buenos Aires.

William R. Shepherd, *The Spanish heritage in America*, 11 páginas, Columbia, 1925.

William R. Shepherd, *The teaching of things Spanish*, 4 páginas, Columbia, 1925.

Alberto Schneidewind, *Estudio económico de los Ferrocarriles argentinos desde el punto de vista del interés general*, 20 páginas, Compañía General de Fósforos, Buenos Aires, 1926.

José Babini, *Sobre la enseñanza de la matemática para los químicos*, 19 páginas, T. Palumbo, Buenos Aires, 1925.

Umberto Nobile, *Il volo transpolare*, 27 páginas, Roma, 1925.

Komatsu Shigeru, *Mitsuru Kuhara's on the beckmann rearrangement*, 83 páginas, Kyoto, 1926.

Emilio C. Díaz, *Internamiento de Seguridad. Artículo 34 del Código Penal*, 33 páginas, Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1926.

Carlos E. Porter, *Tres «pololos» chilenos perjudiciales a la agricultura*, 11 páginas, Santiago (Chile), 1924.

R. P. Navás Longinos, S. J., *Insectos neotrópicos*, 9 páginas, Santiago (Chile), 1925.

I. Theriot, *Contribution a la flore byologique du Chili*, 6 páginas, Santiago (Chile), 1925.

Aurelio Viñas Navarro, *El motín de Evola y su significación en la restauración portuguesa de 1640*, 41 páginas, J. Martínez, Santander, 1925.

Primer Congreso Panamericano de Periodistas, *Programa y Reglamento*, 7 páginas, Wáshington, 1926.

Carlos A. Marelli, *Informaciones sobre el Jardín Zoológico de La Plata con un estudio del gorgojo dacnirótatus bruchi Mar.*, 52 páginas, L. J. Rosso, Buenos Aires, 1926.

Carlos A. Marelli, *Aclimataciones del Jardín Zoológico de La Plata. (Enfermedades y obras generales)*, 58 páginas, Taller de impresiones oficiales, La Plata, 1926.

Annual report of the Naval Observatory for the fiscal year 1926, 19 páginas, Imprenta Oficial, Wáshington, 1926.

Enrique Alejandro Jonas, *La Alopatía y la Homeopatía*, 56 páginas, A. García Santos, Buenos Aires, 1926.

Luis Hijar y Haro, *El Instituto Butantan*, 12 páginas, Talleres gráficos de la Nación, México, 1926.

Relación histórica del mineral de Taxco, 31 páginas, Talleres gráficos de la Nación, México, 1926.

Luis Hijar y Haro, *Sesión de Aniversario de la fundación de esta Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y renovación de su mesa directiva*, 6 páginas, México, 1926.

B. K. Lijareff, *Reseña de la literatura sobre las capas de formación en la región de Perm en la Rusia europea durante la última década 1910-1919*, 48 páginas, Leningrad, 1920.

I. A. Poplavsky, *Méthode et pratique de la statistique conjoncturale du transport des marchandises*, 66 páginas, Moscou, 1926.

Escuela Industrial de la Nación, *Creación de cursos especiales de petróleo. Su organización y programas*, 15 páginas, L. J. Rosso, Buenos Aires, 1926.

Escuela Industrial de la Nación, *Extracto de la Memoria correspondiente al año escolar 1925-1926*, 44 páginas, L. J. Rosso, Buenos Aires, 1926.

Aníbal Roberto Millán, *Notas críticas sobre las «Nicotianas» de la flora argentina*, 19 páginas, Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1926.

Otto Rokotnitz y J. Francisco Sheahan, *Cálculo previo del crecimiento de poblaciones; su utilidad en ingeniería. Población actual de la ciudad de Buenos Aires*, 14 páginas, Buenos Aires, 1926.

La supuesta rectificación del ingeniero agrónomo Carlos Lizer y Trelles al artículo del doctor Carlos A. Marelli sobre los gorgojos que destruyen a los eucaliptos en la Argentina, 5 páginas, Imprenta Coni, Buenos Aires, 1926.

Carlos Curt Hosseus, *Loganiáceas*, 30 páginas, Establecimiento gráfico Pereyra, Buenos Aires, 1926.

Carlos Curt Hosseus, *Apuntes sobre las Cactáceas*, 25 páginas, Imprenta de la Universidad, Córdoba, 1926.

J. C. Llames Massini, *Tratamiento quirúrgico de la eclampsia*, 64 páginas, E. Spinelli, Buenos Aires, 1926.

Santiago Barabino Amadeo, *Antecedentes, diplomas, títulos, nombramientos y trabajos científicos*, 22 páginas, A. Guido Buffarini, Buenos Aires, 1926.

Luis Calderón, *La historia de una deuda Santa Fé versus Rosario,* 63 páginas, J. F. Terrier, La Plata, 1927.

Ovidio Rebaudi, *Apuntes sobre minería paraguaya,* 46 páginas, Asunción (Paraguay), 1924.

Ovidio Rebaudi, *Juicio de la prensa americana respecto de la obra Elementos de Magnetología,* 16 páginas, Asunción (Paraguay), 1911.

Adolf. Söderström, *Zur Kenntnis der Zellarchitektonik,* etc., 72 páginas, Almqvist & Wiksells Boktryc., Uppsala, 1926.

Daniel M. Vélez, Raúl A. Chavira, Emilio F. Montaño, José de J. González, Antonio F. Alonso y Tomás G. Perrín, *El Tracoma. Historia y repartición geográfica, sintomatología, diagnóstico diferencial, tratamiento e histología patológica y microbiológica,* 51 páginas, Talleres gráficos de la Nación, México, 1926.

Tomás G. Perrín, *El problema del cáncer,* 15 páginas, J. Aguilar Vera, México, 1926.

Roberto Kurtz, *Los privilegios universitarios ante la Constitución Nacional,* 41 páginas, Luis Veggia, Buenos Aires, 1926.

Gustavo Alemán Bolaños, *Periodismo y periodistas,* 152 páginas, La Salvadoreña, San Salvador, 1926.

Comité de acción ideológica «Juventud Argentina», *El conflicto mejicano,* 34 páginas, Buenos Aires, 1926.

El total de canjes con que cuenta actualmente la Sociedad es de 342 y el de las subscripciones 24.

El movimiento habido en la biblioteca durante el período que termina se sintetiza en la siguiente planilla :

Canjes nuevos	39
Canjes reiniciados	8
Canjes suspendidos	1
Subscripciones	8
Encuadernaciones (volúmenes)	339
Donaciones (libros, 47; folletos, 73)	120
Libros prestados	48
Notas	319
Acuses de recibos y pedidos de revistas	159

GERENCIA

El desenvolvimiento administrativo ha sido atendido con toda solicitud por el señor gerente don Antonio Alonso Ríos (al que la Junta directiva en su reunión de fecha 15 de diciembre ppdo., resolvió con-

firmar definitivamente en su cargo, por la aptitud y celo demostrados) con la colaboración de los demás empleados, cuya dedicación es justiciero poner de relieve.

OTRAS CONSTANCIAS

Antes de terminar la lectura de esta memoria deseo dejar constancia que se encuentran depositados en custodia en el Banco de la Nación Argentina los títulos y comprobantes siguientes:

1° El título de propiedad del edificio social, Cevallos 269;

2° Dos comprobantes de pago de paredes medianeras;

3° Dos comprobantes de aprobación de cuentas rendidas a la Contaduría general de la Nación, por pesos trece mil ochocientos ochenta y tres con tres centavos moneda nacional ($ 13.883,03 m/n), y pesos seis mil ciento diez y seis con noventa y siete centavos moneda nacional ($ 6.116,97 m/n), correspondientes a los fondos recibidos del gobierno de la Nación para gastos de representación y publicación de los trabajos presentados al IV° Congreso científico (Primero panamericano) de Chile;

4° Dos comprobantes de cuentas presentadas a examen de la Contaduría general de la Nación, por pesos cuarenta y un mil novecientos sesenta y dos con veinte y tres centavos moneda nacional (41.962,23 m/n) y pesos ocho mil treinta y siete cón setenta y siete centavos moneda nacional ($ 8.037,77 m/n), correspondientes a los fondos recibidos del gobierno de la Nación para exploración y estudio de la laguna Iberá.;

5° Un título de la Deuda pública externa de la provincia de Buenos Aires número 163.527, por valor de cien pesos oro sellado nominales;

6° Tres mil setecientos pesos nominales ($ 3.700) de obligaciones municipales (certificados al portador), cuatro mil pesos nominales ($ 4.000) de cédulas hipotecarias argentinas, segunda serie (Ley n° 9145) y un mil quinientos pesos nominales ($ 1.500) de cédulas hipotecarias argentinas, serie décima octava.

EDUARDO HUERGO.

Buenos Aires, abril 8 de 1927.

VOLÚMENES Y FOLLETOS RECIBIDOS

En el semestre de julio a diciembre de 1926

H. Fändrich, *Guía del viajero en Alemania. Manual práctico para los españoles e hispanoamericanos que visiten Alemania*, 179 páginas, Imprenta « Mercur », año 1926, Buenos Aires.

Servicio Hidrográfico del Ministerio de Marina, República Argentina, *Tablas de marea para 1927*. Sumario : *Advertencia. Puerto La Colonia (R. O. del U.). Canal de Punta Indio « El Codillo ». Puerto Mar del Plata. Canal « La Manuelita ». Puerto Belgrano. Puerto San Blas. Puerto San Antonio. Golfo de San José. Puerto Madryn. Puerto Comodoro Rivadavia. Puerto Deseado. Puerto San Julián. Puerto Santa Cruz. Puerto Gallegos*, 279 páginas, Talleres Gráficos de la Dirección General Administrativa, Ministerio de Márina, Buenos Aires.

P. Weis et G. Foëx, *Le Magnétisme*. Sumario : *Introduction. Définitions et lois fondamentales. Le Diamagnétisme. Le Paramagnétisme, gaz parfaits et solutions étendues. Les Paramagnéstiques a champ moléculaire. Le Ferromagnétisme. Théorie du Ferromagnétisme. Étude détaillée de la courbe d'aimantation. Le Ferromagnétisme des cristaux. Propietés énérgétiques des ferromagnétiques. Sur le mécanisme de l'aimantation et de l'hystérèse et le phénomène de Barkhausen. La nature du champ moléculaire. Les moments atomiques. Moment atomique et système périodique. Equation d'état magnétique et variation du moment atomique. Expérience de Gerlach et Stern. Bibliographie*, 215 páginas, Libraire Armand Colin, año 1926, Paris.

Pedro I. Caraffa, *Contribución italiana al desarrollo intelectual en la República Argentina. Ensayo histórico-bibliográfico*, 80 páginas, Talleres Olivieri y Domínguez, año 1926, La Plata.

Adolf Söderström, *Das problem der Polygordius-Endolarve; ein gegenantwoet an professor Ricard Woltereck*, 177 páginas, Almquist & Wiksells Boktryckeri-A,-B., año 1924, Uppsala.

Wilhelm Trabert, *Meteorología*. Sumario : *Introducción. La radiación so-*

lar y celeste. La temperatura. Distribución del calor en la superficie terrestre. La presión atmosférica. Fenómenos dinámicos de la atmósfera. La humedad. Nubosidad. Las precipitaciones. Electricidad atmosférica. Fenómenos ópticos de la atmósfera. Pronóstico del tiempo. Importancia de la atmósfera para la tierra, 146 páginas, Editorial Labor, S. A., año 1926, Barcelona.

Obras Sanitarias de la Nación, *Memoria del Directorio correspondiente al año 1925,* 432 páginas, Imprenta Obras Sanitarias de la Nación, año 1926, Buenos Aires.

H. Lüscher, *Fotogrametría,* 167 páginas, Editorial Labor, S. A., año 1926, Barcelona.

Fritz Frech, *Geología: Volcanes, estructura de las montañas, temblores de tierra,* 304 páginas, Editorial Labor, S. A., año 1926, Barcelona.

Sociedad de las Naciones (Secretaría de la), *La obra de la Sociedad de las Naciones (enero 1920-junio 1925), Sección de información,* 106 páginas, año 1926, Madrid.

C. Gutton, *Radiotechnique Générale.* Sumario: *Circuit oscillant. Décharge par étincelles d'un condensateur. Charge du condensateur d'un circuit oscillant à étincelles. Eclateurs. Entretien des oscillations par l'arc électrique. Alternateurs à haute fréquence. La lampe à trois électrodes. Entretien des oscillations par la lampe à trois électrodes. Circuits oscillants couplés. Résonance. Antenne. Propagation des ondes électromagnétiques. Résistance des conducteurs en haute fréquence. Prise de terre. Postes rodiotélégraphiques d'emission. Réception des signaux radiotélégraphiques. Détection. Détection par la lampe à trois électrodes. Amplification. Appareils de réception; Réception sur cadre. Radiogoniométrie. Radiotéléphonie. Mesures électriques en haute fréquence. Ondemètres,* 572 páginas, Librairie J. B. Baillière et Fils, año 1926, Paris.

Alfredo J. Torcelli, *Paraná y Monte Hermoso,* edición oficial ordenada por el gobierno de la provincia de Buenos Aires. Sumario: *Obras completas y correspondencia científica de Florentino Ameghino,* volumen V, 521 páginas, Taller de Impresiones Oficiales, año 1916, La Plata.

Demetrio Kriniu, *Curso de caminos,* 643 páginas, año 1926, Moscou.

Carlos A. Marelli, *Normas para la obtención bioestadística de las Variaciones de los caracteres en diferentes especies vegetales,* 237 páginas, Imprenta y casa editora « Coni », año 1926, Buenos Aires.

Roberto Levillier, *El Perú y el Tucumán en los tiempos prehispánicos, Ensayo sobre las afinidades de sus culturas primitivas,* 80 páginas, Librería Rosay, año 1926, Lima (Perú).

Ernesto Baldassari, *Vías navegables y puertos de la República Argentina,* 204 páginas, Talleres Gráficos del Ministerio de Obras Públicas, año 1925, Buenos Aires.

Colección de publicaciones históricas de la biblioteca del Congreso argentino, Gobernantes del Perú; cartas y papeles, tomo I, páginas 580, Sucesores de Rivadeneyra (S. A.), año 1921, Madrid; tomo II, páginas 666, Suceso-

res de Rivadeneyra (S. A.), año 1921, Madrid; tomo III, 690 páginas, Sucesores de Rivadeneyra (S. A.), año 1921, Madrid; tomo IV, 524 páginas, Imprenta de Juan Pueyo, año 1924, Madrid; tomo V, 510 páginas, Imprenta de Juan Pueyo, año 1924, Madrid.

Audiencia de Lima; correspondencia de presidentes y oidores, tomo I, 360 páginas, Imprenta de Juan Pueyo, año 1922, Madrid; *Audiencia de Charcas,* tomo II, 615 páginas, Imprenta de Juan Pueyo, año 1922, Madrid; tomo III, 521 páginas, Imprenta de Juan Pueyo, año 1922, Madrid.

Gobernación del Tucumán; probanzas de méritos y servicios de los conquistadores, tomo II, 624 páginas, Sucesores de Rivadeneya (S. A.), año 1920, Madrid.

Organización de la Iglesia y órdenes religiosas en el Virreinato del Perú en el siglo XVI; 1ª y 2ª parte, 1066 páginas, Sucesores de Rivadeneya (S. A.), año 1919, Madrid.

Gobernación del Tucumán; papeles de gobernadores en el siglo XVI, IIª parte, Imprenta de Juan Pueyo, año 1920, Madrid.

Repertorio de los documentos históricos procedentes del Archivo de Indias, 142 páginas, Rivadeneyra (S. A.), Artes Gráficas, año 1921, Madrid.

Pedro Belou, *Conferencias y discursos durante diez años de actuación universitaria 1914-1924,* 238 páginas, Imprenta « Oceana », año 1924, Buenos Aires.

Edmundo Escomel, *Un nouveau Pseudo-Méloide, insecte médicinal du Pérou,* Extrait du *Bulletin de la Société de Pathologie Exotique,* tome XIX, Séance du 10 Mars 1926, nº 3, 4 páginas, Masson & Cie., Editeurs, Paris.

Edmundo Escomel, *Termas minerales de Yura. Grupos de aguas sulfurosas y ferruginosas. Gases desprendidos en las superficies de los pozos. Protozoarios de las aguas. Algas. Indicaciones terapéuticas,* etc., 32 páginas, Tipografía Cuadros, Arequipa, Perú.

Edmundo Escomel, *Une dermatite climatérique la Chapetonada,* 6 páginas, Masson et Cíe., Editeurs, año 1926, Paris.

Edmundo Escomel, *Batraciens conservateurs et propagateurs de certaines flagelloses intestinales de l'Homme.* Extrait du *Bulletin de la Société de Pathologie Exotique,* tome XVIII. Séance du 8 juillet 1925, nº 7, 5 páginas, Masson & Cie., Editeurs, Paris.

Edmundo Escomel, *Leishmaniose américaine des sinus frontaux, Traitement favorable par l'iodure double de quinine et bismuth.* Extrait du *Bulletin de la Société de Pathologie Exotique,* tome XVIII. Séance du 14 octobre 1925, nº 8, 6 páginas, Masson & Cíe., Editeurs, Paris.

J. Blanco Villalta, *« Noruega » el país de los Fiords. « Oslo » y sus museos. Datos generales que conviene conocer al turista que llega a Oslo,* 23 páginas, Steenske Boktrykkeri Johannes Bjornstad, Oslo.

Lorenzo R. Parodi, *Las malezas de los cultivos en el partido de Pergamino, con un estudio de los « cuerpos extraños » del lino y del trigo,* de la *Re-*

vista de la Facultad de agronomía y veterinaria, entrega II, tomo V, 171 páginas, Imprenta de la Universidad, año 1926, Buenos Aires.

Instituto para el tratamiento específico de las enfermedades pulmonares, *Homenaje del profesor doctor Samuel de Madrid, a los desamparados de la peste blanca, al cuerpo médico y Facultad de medicina de Córdoba, al gobierno de la provincia de Córdoba. Nuestra vaccino y psicoterapia antituberculosa,* 69 páginas, Talleres S. A. Casa Jacobo Peuser, Ltda., Buenos Aires.

Miguel Artigas, *Comedia nueva en chanza « El comendador de Ocaña », parodia anónima del siglo XXII,* 28 páginas, *Boletín de la Biblioteca Menéndez y Pelayo,* año 1926, Talleres tipográficos J. Martínez, Santander.

Ovidio Rebaudi, *Juicios de la prensa americana respecto de la obra « Elementos de magnetología »,* 16 páginas, Madrid.

Carlos Curt Hosseus, *Apuntes sobre las cactáceas,* 25 páginas, Imprenta de la Universidad, año 1926, Córdoba.

Carlos Curt Hosseus, *« Loganiáceas »,* de la *Revista del Centro de estudiantes de farmacia,* año II, número 5, 30 páginas, Establecimiento gráfico Pereyra, año 1926, Córdoba.

La supuesta rectificación del ingeniero agrónomo Carlos Lizer y Trelles, al artículo del doctor Carlos A. Marelli « Sobre los gorgojos que destruyen a los eucaliptos en la Argentina, 5 páginas, Imprenta y casa editora « Coni », año 1926, Buenos Aires.

Otto Rokotnitz y J. Francisco Sheahan, *Cálculo previo del crecimiento de poblaciones, su utilidad en ingeniería, población actual de la ciudad de Buenos Aires,* 16 páginas, año 1926, Buenos Aires.

Aníbal Roberto Millán, *Notas críticas sobre las « Nicotianas » de la flora Argentina,* de la *Revista de la Facultad de agronomía y veterinaria,* entrega II, tomo V, 19 páginas, Imprenta de la Universidad, año 1926, Buenos Aires.

Escuela Industrial de la Nación « Otto Krause », *Extracto de la Memoria correspondiente al año escolar 1925-1926, elevada al Ministerio de Justicia e Instrucción Pública* (14 láminas y un plano), Talleres gráficos argentinos, L. J. Rosso, año 1926, Buenos Aires.

Escuela Industrial de la Nación « Otto Krause », *Creación de cursos especiales de petróleo. Su organización y programas,* 15 páginas, Talleres gráficos argentinos, L. J. Rosso, año 1926, Buenos Aires.

I. A. Poplavsky, *Administration Centrale de Statistique de L. U. R. S. S., Section de la Statistique du Transport et des Communications. Méthode et pratique de la statistique conjoncturale du transport des marchandises,* 80 páginas, año 1926, Moscou.

Publicaciones del Comité geológico de Leningrado, *Reseña de la literatura sobre las capas de formación en la región de Perm, en la Rusia europea durante la última década 1910-1919,* por B. K. Lijareff, geólogo del Comité geológico, 48 páginas, año 1920, Leningrado.

Sociedad Científica « Antonio Alzate », *Relación histórica del mineral de*

Taxco. Copia del informe original del señor don José Vicente de Anza, de las minas del cerro de Compaña, Taxco, 31 páginas, Talleres gráficos de la Nación, Secretaría de educación, año 1926, Méjico.

Enrique Alejandro Jonas, *Diferencias fundamentalss entre la alopatía y la homeopatía,* 56 páginas, Librería de A. García Santos, año 1926, Buenos Aires.

Luis Hijar y Haro, M. S. A., *El Instituto Butantan, San Paulo, Brasil* (sesión de 6 de mayo de 1925, de la Sociedad científica « Antonio Alzate », tomo 44, *Memorias),* 12 páginas, Talleres gráficos de la Nación, año 1926, Méjico.

Annual Report of the Naval Observatory for the Fiscal Year 1926. Appendix N° 2 to the annual report of the chief of the bureau of navigation, 1926, 19 páginas, Government Printing Office, año 1926, Washington.

Carlos A. Marelli, *Aclimataciones del Jardín Zoológico de La Plata (Enfermedades y obras generales),* de la *Memoria del Ministerio de Obras Públicas* (años 1923-24, págs. 831-888), 58 páginas, Taller de Impresiones Oficiales, año 1926, La Plata.

Carlos A. Marelli, *Informaciones sobre el Jardín Zoológico de La Plata con un estudio del gorgojo « Dacnirotatus Bruchi »* Mar. *(destructor de los eucaliptos,* de la *Memoria del Ministerio de Obras Públicas,* años 1923-25, págs. 597-646 y tres láminas con 11 figuras), 52 páginas, Talleres gráficos argentinos de L. J. Rosso y Cía., año 1926, Buenos Aires.

Unión Panamericana, *Primer Congrcso panamericano de periodistas. Programa y reglamento,* 5 páginas, año 1926, Wáshington.

Aurelio Viñas Navarro, *El motín de Evora y su significación en la restauración portuguesa de 1640,* 41 páginas, *Boletín de la biblioteca Menéndez y Pelayo,* año 1925, Santander.

I. Theriot, *Contribution a la flore byologique du Chili.* Extracto de la *Revista chilena de historia natural,* año XXIX (1925), páginas 287-292, 6 páginas, Fontaine-le Mallet, año 1925.

R. P. Longinos Navas, S. J., *Insectos neotrópicos. Familias Agriónidos, Crisópidos, Mantíspidos, Leptoflébidos, Pérlidos, Nemúridos y Leptocéridos,* 9 páginas, Zaragoza, año 1925.

Carlos E. Porter, *Tres « pololos » chilenos perjudiciales a la agricultura.* Sumario : *Dos palabras de introducción; Nombres vulgares, caracteres sobresalientes y generalidades sobre la biología de los « pololos » ; La Phytoloema Herrmanni; La Rivera plebeja ; El Athia rustica ; Bibliografía de estos tres insectos,* 11 páginas, Santiago (Chile).

Emilio C. Díaz, *Internamiento de seguridad* (art. 34 del Código penal). Sumario : *El peligro condiciona la medida. El internamiento estatuído imperativamente. La cuestión en los proyectos desde 1906. Una opinión orientada en distinto sentido. La obligatoriedad surge del contenido y del fundamento de la medida. Irrevocabilidad de la soltura. Peligrosidad social e inmanencia criminal. Una cuestión con caracteres inquietantes. Los extremos absolu-*

tos del problema. Bases para la reglamentación legal del principio. Antecedentes valiosos de algunos proyectos contemporáneos. Un juicio sintético de Florián. Los requisitos para la soltura y las fórmulas legales. La peligrosidad criminal y la oportunidad de la soltura. El peligro para sí mismo en el recluído de la expresión. La desaparición del peligro ha de ser absoluta y radical. Proyecto de ley belga de 1924. Crítica pertinente. Elementos para integración del juicio relativo al peligro. La noción del peligro en la ley Argentina. Intento de fijación del criterio legal argentino. La fórmula Argentina es bien amplia y ofrece las necesarias garantías, 33 páginas, Imprenta de la Universidad, año 1926, Buenos Aires.

Sociedad Mejicana de geografía y estadística, *Sesión de aniversario y renovación de su mesa directiva. Informe de la secretaría. Estudios presentados,* 6 páginas, Méjico, año 1926.

BIBLIOGRAFÍA

Química del carbono. Teoría y práctica, por P. EDUARDO VITORIA, S. J., 1927.

Obra recientemente aparecida, abarca en su estudio las funciones y compuestos más importantes de la química del carbono. Dentro de la concision y sencillez del lenguaje — factores valiosos en un tratado científico — el autor trata con amplitud los distintos capítulos de esta parte de la química, refiriéndose a los métodos de preparación, propiedades y aplicaciones de los cuerpos estudiados, no omitiendo el método clásico de preparación y haciendo una cuidada mención del uso y relaciones industriales que ellos pueden tener-

El plan general del tratado es digno de elogio. Después de referirse a las nociones fundamentales de análisis elemental, nomenclatura, isomería, etc., entra directamente en el estudio de los hidrocarburos acíclicos y cíclicos para luego continuar con las distintas funciones, en orden lógico, aplicadas a las configuraciones atómicas cerradas y abiertas.

Creemos que muy en lo exacto ha estado el autor al considerar, como textualmente lo expresa en el prefacio : « Éstas, en efecto, — se refiere a las funciones — tiene casi las mismas maneras de formarse, análogas propiedades y parecidos modos de reaccionar en la serie alifática que en la aromática : por eso las estudiamos simultáneamente ».

La misma unidad de conjunto que presentan los cuerpos en el complejo edificio de la química del carbono se opone didáctica y científicamente al estudio casi independiente, que se acostumbra hacer, de las funciones aplicadas a una serie y otra ; y esto resalta más aún si se considera la existencia de una categoría de cuerpos de condiciones intermedias.

En resumen : las 892 páginas que forman el volumen que comentamos constituyen un importante acervo de conocimientos, fuente de estudio, donde se encontrará, además, la cita bibliográfica de las últimas adquisiciones de la materia y la transcripción de las constantes de los cuerpos, extractadas de las *International Critical Tables*.

Ha de encontrar la obra, por su utilidad, amplia acogida entre los universitarios, vale decir, merecerá la misma difusión que las otras publicaciones del mismo autor, provechosamente leídas por los hombres de estudio.

REINALDO VANOSSI.

LISTA DE PUBLICACIONES (*)

QUE SE RECIBEN EN LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

Argentina

CAPITAL FEDERAL

Asociación Argentina de Electrotécnicos (Boletín).

Asociación Médica Argentina (Revista).

Revista de la Sociedad Argentina de Radio y Electrología.

Revista de la Sociedad Argentina de Neurología y Psiquiatría.

Revista de la Sociedad Argentina de Otorinolaringología.

Revista de la Sociedad de Higiene y Microbiología.

Revista de la Sociedad Argentina de Urología.

Revista de la Sociedad Argentina de Biología y su filial de la Sociedad de Biología del Litoral.

Revista de la Sociedad Argentina de Nipiología.

Revista de la Sociedad de Medicina Interna.

Revista de la Sociedad Argentina de Tisiología.

Revista de Especialidades.

Revista de la Sociedad Argentina de Oftalmología.

Asociación Química Argentina (Anales).

Asociación del Trabajo.

Boletín de Servicios.

Boletín de Informaciones Petrolíferas.

Boletín de Obras Públicas de la República Argentina.

Cámara de Diputados de la Nación.

Diario de Sesiones.

Cámara de Senadores de la Nación.

Diario de Sesiones.

Centro Estudiantes de Farmacia y Bioquímica.

Revista.

(*) La publicación de esta lista se hace en atención a un pedido formulado por el Instituto Internacional de Cooperación Intelectual de la Liga de las Naciones.

Centro Estudiantes del Instituto Nacional del Profesorado Secundario.
Boletín.
Centro Naval.
Boletín.
Centro de Profesores diplomados de Enseñanza Secundaria.
Revista.
Chemia.
Círculo Médico Argentino y Centro Estudiantes de Medicina.
Revista.
Conçejo Deliberante.
Diario de Sesiones.
Confederación Argentina del Comercio, de la Industria y de la Producción.
Estudio de Problemas Nacionales.
Boletín.
Departamento Nacional de Higiene.
Anales.
Departamento Nacional del Trabajo.
Crónica Mensual.
Dirección General de Estadística Municipal.
Boletín Mensual.
Dirección General de Estadística de la Nación.
Anuario del Comercio Exterior de la República Argentina.
El Comercio Exterior Argentino. Boletín.
Serie C. El Comercio Exterior Argentino.
Dirección General de Minas, Geología e Hidrología.
Publicaciones.
El Arquitecto.
El Monitor de la Educación Común.
Facultad de Agronomía y Veterinaria.
Revista.
Investigaciones de Seminario (Facultad de Ciencias Económicas).
Facultad de Derecho y Ciencias Sociales.
Revista.
Facultad de Filosofía y Letras. Instituto de Investigaciones Históricas.
Publicaciones.
Boletín.
Instituto Bacteriológico.
Revista.
Instituto de Botánica y Farmacología.
Trabajos.
Instituto Geográfico Argentino.
Boletín.
Instituto de Medicina Experimental.
Boletín.

Instituto Modelo de Clínica Médica.
Anales.
La Ingeniería.
La Semana Medica.
Ministerio de Agricultura.
Ministerio de Relaciones Exteriores y Culto.
Circular Informativa Mensual.
Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires.
Anales.
Comunicaciones.
Museo Social Argentino.
Boletín.
Obras Sanitarias de la Nación.
Memoria del Directorio.
Oficina Meteorológica Argentina.
Boletín Mensual.
Carta del tiempo.
Pronóstico del estado del tiempo. Semanal.
Petróleos y Minas.
Phoenix.
Physis.
Revista de Arquitectura.
Revista de Ciencias Económicas.
Revista de Criminología, Psiquiatría y Medicina Legal.
Revista Farmaceútica.
Revista de Filosofía.
Revista Jurídica y de Ciencias Sociales.
Revista Médica Latino-Americana.
Revista de Medicina Veterinaria.
Revista de la Sanidad Militar.
Revista de Tierra y Colonización.
Revista Zootécnica.
Sociedad Entomológica Argentina.
Boletín.
Revista.
Sociedad Rural Argentina.
Anales.
Unión Industrial Argentina.
Boletín.
Anales.
Universidad Nacional de Buenos Aires.
Revista.

PROVINCIA DE BUENOS AIRES

Centro de Estudiantes de Medicina Veterinaria.
Revista.
Dirección General de Estadística de la provincia de Buenos Aires.
Boletín.
Escuela de Ciencias Médicas y Centro Estudiantes de Medicina.
Revista.
Facultad de Agronomía.
Revista.
Facultad de Medicina Veterinaria.
Revista.
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas Puras y Aplicadas.
Anuario.
Contribución al estudio de las ciencias Físicas y Matemáticas:
Serie Matemático-Física.
Serie Técnica.
Facultad de Ciencias Químicas.
Revista.
Humanidades.
Museo de La Plata.
Revista.
Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata.
Efemérides del Sol y de la Luna.

PROVINCIA DE CÓRDOBA

Academia Nacional de Ciencias.
Actas.
Boletín.
Miscelánea.
Universidad Nacional de Córdoba.
Revista.

PROVINCIA DE SANTA FE

Centro Estudiantes de Medicina (Rosario).
Revista.

PROVINCIA DE TUCUMÁN

Revista Industrial y Agrícola.
Universidad de Tucumán.
Boletín.
Extensión Universitaria.
Publicaciones del Laboratorio de física.

Alemania

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu Munchen.
Zitzungsberichte der mathematisch. Naturwissenchtlichen Abteilung.
Deutschen Mathematiker. Vereinigung.
Jahresbericht.
Deutsche Geographische Blatter.
El progreso de la Ingeniería.
Forschritte der Mineralogie, Kristallographie und Petrographie.
Gesellschaft fur Erdkunke zu Berlin.
Zeitschrift.
Geographischen Gesellschaft in Hamburg.
Mitteilungen.
Ibero Amerikanischen Archir.
Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen.
Mathematisch-Physikalische Klasse.
Geschaftliche Mitteilungen.
Leopoldina.
Natur forschenden Gesellschaft zu Freiburg I. B. Freiburg.
Berichte.
Naturhistorichen Vereins der Preussischen Rheinlande und Westfalens.
Sitzungsberichte.
Verhandlungen.
Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, in Dresden.
Sitzungsberichte und Abhandlungen.
Naturwissenschaftlichen verein zu Bremen.
Abhandlungen.
Physikalisch-Okonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr.
Schriften.
Preussischen Akademie der Wissenschaften.
Sitzungsberichte.
Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.
Berichte über die Verhandlungen.
Zoologischen Staatinstitut und Zoologischen Museum in Hamburg.
Mitteilungen.

Australia

Institute of Science and Industry.
Bulletin.
Council for Scientific and Industrial Research.

Austria

Akademie der Wissenschaften in Wien.
Sitzungsberichte.
Mitteilungen der Erdbeden-Kommission.
Naturhistorischen Museum in Wien.
Annalen.
Zoologisch. Botanischen Gesellschaft in Wien.
Verhandlungen.

Bélgica

Academie Royale des Sciences. des Lettres et des Beaux Arts de Belgique.
Annuaire.
Bulletin de la Classe de Sciences.
Association des Ingenieurs Electriciens. sortis de L'institut Electrotechnique Montefiore.
Bulletin.
Sociètè Royale de Botanique de Belgique.
Bulletin.
Sociètè Chimique de Belgique.
Bulletins.
Sociètè Royale Zoologique de Belgique.
Annales.

Brasil

A Folha Medica.
A Lavoura.
Directoria de Meteorologia.
Boletim Meteorologico.
Escola superior de Agricultura e Medicina Veterinaria.
Archivos.
Instituto do Ceara.
Revista Trimestral.
Instituto Historico e Geographico Brazileiro.
Revista.
Jardim Botanico do Rio de Janeiro.
Archivos.
Ministerio da Agricultura, Industria e Commerço.
Serviço Geologico e Mineralogico do Brasil. Boletim.
Serviço de Informações (e divulgação). Boletim do Ministerio de Agricultura, Industria e Commerço.
Folletos.

Museu Goeldi de Historia Natural e Ethnographia (Museu Paraense).
Boletim.
Museu Nacional do Rio de Janeiro.
Boletim.
Archivos.
Fauna Brasiliense.
Museu Paulista.
Revista.
Observatorio Nacional do Rio de Janeiro.
Annuario.
Revista Brazileira de Engenharia.
Revista de Zootechnia e Veterinaria.
Secretaria da Agricultura, Industria, Terras, Viação e Obras Publicas do Estado de Minas Geraes.
Boletim de Normaes de Tempo, Chuva e Insolação.
Secretaria da Agricultura, Commerço e Obras Publicas do Estado de São Paulo.
Boletim da Agricultura.
Boletim da Directoria de Industria e Commerço.
Boletim do Departamento Estadual do Trabalho.
Sociedade de Geographia do Rio de Janeiro.
Revista.
Sociedade Nacional de Agricultura.
Revista.

Canadá

Canadian Chemistry and Metalurgy.
Comission Geologique du Ministère des Mines.
Rapport Sommaire.
Memoires.
Laboratoire de Botanique de L'université de Montreal.
Contributions.
Université Laval.
Annuaire.

Colombia

Anales de Ingeniería.
Revista Agrícola.

Costa Rica

Oficina de Depósito y canje de Publicaciones.
Diversas revistas.

Cuba

Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales de la Habana.
Anales.
Facultad de Letras y Ciencias.
Revista.
Observatorio del Colegio de Belén, de la Compañía de Jesús en la Habana.
Observatorio Meteorológico, Magnético y Séismico del Colegio de Belén, de la C. de Jesús.
Revista de Agricultura, Comercio y Trabajo.
Revista de Medicina y Cirugía de la Habana.
Secretaría de Agricultura, Comercio y Trabajo.
Boletín oficial de Marcas y Patentes.
Sociedad Cubana de Historia Natural « Felipe Poey ».
Memorias.

Checoeslovaquia

Casopis.
Lotos.
Mykologia.
Rocenka.
Sbornik.

Chile

Anales de Zoología Aplicada.
Instituto de Ingenieros de Chile.
Anales.
Instituto Central Meteorológico y Geofísico de Chile.
Anuario Meteorológico de Chile.
Museo de Etnología y Antropología de Chile.
Publicaciones.
Museo Nacional de Chile.
Boletín.
Oficina Hidrográfica de Chile.
Anuario Hidrográfico de la Marina de Chile.
Revista Chilena de Higiene.
Revista Chilena de Historia Natural.
Revista de Marina de Chile.
Revista Médica de Chile.
Sociedad Nacional de Minería.
Boletín Minero.
Société Scientifique du Chili.
Actes.
Universidad de Chile.
Anales.

Dinamarca

Laboratoire Carlsberg.
Compte Rendu des Travaux.

Ecuador

Academia Nacional de Historia.
Boletín.
Biblioteca Nacional de Quito.
Boletín.
Sociedad Jurídico-Literaria.
Revista.
Universidad Central.
Anales.

El Salvador

Boletín de Fomento y Obras Públicas.
Boletín de Sanidad y Beneficencia.
La Escuela Salvadoreña (Revista del Ministerio de Instrucción Pública).
Ministerio de Relaciones Exteriores.
Boletín.
Revista de Agricultura Tropical.
Revista del Círculo Militar.
Revista Judicial.

España

Cataluña Textil.
Junta de Ciencias Naturales de Barcelona.
Treballs del Museu de Ciencíes Naturals de Barcelona.
Memories del Museu de Ciencies Naturals de Barcelona (Serie Botánica).
Junta para ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas.
Memoria.
Instituto Nacional de Ciencias (diversas publicaciones).
Observatorio de Física Cósmica del Ebro.
Boletín Mensual del Observatorio del Ebro.
Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.
Memorias.
Boletín.
Boletín del Observatorio Fabra: Sección Astronómica y Sección Meteorológica y Sísmica.
Real Sociedad Geográfica.
Boletín.
Boletín (de la). Revista de Geografía Colonial y Mercantil.

Revista de las Españas.
Revista Matemática Hispano Americana.
Revista Minera, Metalúrgica y de Ingeniería.
Revista de Obras Públicas.
y Boletín Profesional e Industrial.
Sociedad Española de Antropología, Etnografía y Prehistoria.
Actas y Memorias.
Sociedad Española de Física y Química.
Anales.
Sociedad Española de Historia Natural.
Boletín.
Memorias.
Técnica (Revista Tecnológica Industrial).
Unión Ibero-Americana.
Revista Mensual.

Estados Unidos

Academy of Natural Sciences of Philadelphia.
Proceedings.
Year Book.
Agricultural Experiment Station (Cornell University).
Bulletin.
Memoirs.
American Anthropological Association.
Memoirs.
American Anthropologist.
American Electro-Chemical Society (Columbia University).
American Institute of Mining and Metallurgical Engineers.
Transactions.
American Mathematical Society.
Bulletin.
American Museum of Natural History.
American Museum Novitates.
Bulletin.
American Phylosophical Society.
Proceedings.
American Society of Civil Engineers.
Proceedings.
American Society for Testing Materials.
AS. T. M. Standards (issued triennially).
AS. T. M. Standards (adopted in).
Bulletin.
Proceedings.

Boston Society of Natural History.
Proceedings.
Brooklyn Institute of Arts and Sciences (The).
Science Bulletin.
Bureau of Standards.
Scientific Papers.
Technologic Papers.
California Academy of Sciences.
Occasional Papers.
Proceedings.
Cereal Chemistry.
Chemical Abstracts.
Connecticut Academy of Arts and Sciences.
Transactions.
Ecology.
Elisha Mitchell Scientific Society.
Journal.
Engineers and Engineering.
Engineers' Society of Western Pennsylvania.
Proceedings.
Experiment Station Record.
Field Columbian Museum.
Anthropological Series.
Botanical Series.
Zoological Series.
Annual Report of the Director.
Franklyn Institute.
Journal.
Illinois (State of).
Bulletin of the Illinois State Laboratory of Natural History.
Bulletin. Division of the State Geological Survey.
Report of Investigation.
Bulletin. State of Illinois Department of Registration and Education Division of the State Geological Survey.
Indiana Academy of Science.
Proceedings.
Inter-America.
Journal of Agricultural Research.
Kansas University (The).
Science Bulletin.
La Hacienda.
Lloyd Library.
Mycological Notes.

Maine Agricultural Experiment Station.
Bulletin.
Marine Biological Laboratory.
Michigan Academy of Sciences, Arts and Letters.
Papers.
Mineralogical Society of America.
Journal.
Missouri Botanical Garden.
Annals.
Museum of Comparative Zoology.
Annual Report of the Director.
Bulletin.
National Academy of Sciences of the United States of America.
Proceedings.
Nela Research Laboratory. National Lamps Works of General Electric Company.
Abstract-Bulletin.
New York Botanical Garden.
Bulletin.
New York Public Library.
Bulletin.
Oficina Sanitaria Panamericana.
Boletín.
Public Museum of the City of Milwaukee.
Bulletin.
Puget Sound Biological Station.
Publications.
Scientific Laboratories of Denison University.
Journal.
Smithsonian Institution.
Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary (of the).
Annual Report of the Board of Regents (of the).
Report on the Progress and Condition of the U. S. National Museum for the year.
Bureau of American Ethnology. Bulletin.
Smithsonian Miscellaneous Colletions.
Proceedings of the U. S. National Museum.
Society of Naval Architects and Marine Engineers.
Papers.
State of Minnesota.
Bulletin.
The American Mineralogist.
The Association of official Agricultural Chemists.
Journal.

The Geographical Review.
The Journal of Geology.
The Midland Naturalist.
The Physical Review.
The Wisconsin Archeologist.
Unión Panamericana.
Boletín.
Finanzas, Industria, Comercio.
Salud Pública y Puericultura.
Agricultura.
Educación.
United States Coast and Geodetic Survey.
Annual Report of the Director (the) to the Secretary of Commerce.
United States Geological Survey.
Annual Report of the Director for the Fiscal Year.
Bulletin.
Mineral Resources of the U. S. Calendar Year.
Professional Paper.
Water Supply Paper.
University of California.
Agricultural Experiment Station.
Publications in Geology.
Publications in Botany.
Publications in Enginnering.
Publications in Mathematics.
University of Colorado Studies.
Bulletin.
University of Illinois.
Agricultural Experiment Station. Bulletin.
Engineering Experiment Station. Bulletin.
Illinois Biological Monographs.
University of Michigan.
Museum of Geology:
Contribution.
Museum of Zoology:
Occasional Papers.
Miscellaneous Publications.
University of Nebraska.
Agric. Exp. Station:
Bulletin.
Circular.
Extensión Circular.
Research Bulletin.
Annual Report.

Bull. of the Univ. Nebraska : Genereal Catalogue.

Warren Academy of Sciences.

Transactions.

Washington University.

Studies.

Wisconsin Geological and Natural History Survey.

Bulletin.

Estonia

Eesti Vabariigi. Tartuülikooli.

Toimetused. Acta et Commentationes. Univ. Dorpatensis.

A : Mathematica. Physica. Medica.

B : Humaniora.

Ettelugemiste Rava.

Folia Neuropathologica Estoniana.

Filipinas

Philippine Weather Bureau. Manila Central Observatory.

Bulletin.

Annual Report.

The Philippine Journal of Science.

Finlandia

Academia Scentiarum Fennica.

Annales :

Serie A.

Serie B.

F. F. Communications.

Forstwissenschaftlichen Gesellschaft in Finland.

Acta Forestalia Fennica.

Societas Geographica Fenniæ.

Fennia.

Societas Pro Fauna et Flora Fennica.

Acta.

Acta Botanica Fennica.

Societas Scientiarum Fennica.

Acta.

Arsbok-Vuosikirja.

Commentationes Biologicæ.

Commentationes Humanarum-Litterarum.

Commentationes Physico-Mathematicæ.

Ofversikt (af Finska Vetenskaps Societetens). Forhandlinger.

Francia

Academie des Sciences.
Compte Rendus Hebdomadaires des Séances.
Académie des Sciences, Agriculture. Arts et Belles Lettres D'Aix.
Mémoires.
Academie des Sciences et Lettres de Montpellier.
Bulletin Mensuel.
Annales de Chimie.
Annales de Physique.
Annales des Mines.
Mémoires.
Partie Administrative.
Annales des Ponts et Chausees.
Partie Technique.
Partie Administrative.
Arts et Metiers.
Association de Bibliographie et Documentation (Scientifique, Industrielle et Commerciale).
Bulletin.
Association Internationale Permanente des Congres de la Route.
Bulletin.
Faculté des Sciences de Marseille.
Annales.
L'Aeronautique.
La Nature.
La Science Moderne.
Museum National D'Histoire Naturelle.
Bulletin.
Nouvelles Archives des Missions Scientifiques et Litteraires.
Por la Salud.
Revue de L'Amerique Latine.
Revue de Botanique apliquée et d'Agriculture coloniale.
Revue Economique Française.
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées.
Revue Scientifique.
Société des Americanistes de Paris.
Journal.
Société d'Anthropologie de Paris.
Bulletin et Memoires.
Société d'Études Scientifiques d'Angers.
Bulletin.
Société de Geographie Commerciale de Bordeaux.
Bulletin.

Société de Geographie Commerciale du Havre.
Bulletin.
Société des Ingenieurs Civils.
Annuaire.
Mémoires et Comptes Rendus des Travaux (de la). Bulletin.
Procés Verbal.
Société Linneenne de Lyon.
Annales.
Société Nationale des Sciences Naturelles et Mathematiques de Cherbourg.
Mémoires.
Tables Annuelles de Contantes et Donnees Numeriques de Chimie, de Physique et de Technologie.
Université de Rennes.
Annuaire.
Travaux Scientifiques.
Université de Toullouse.

Georgia

Jardin Botanique de Tiflis.
Moniteur.
Scientific Papers of the Applied Sections of the Tiflis Botan. Garden.

Holanda

Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
Proceedings of the Sections of Sciences.
Jaarboek.
Verhandelingen (der):
I. Erste sectie.
II. Tweedie sectie.
Koninklijke Vereeniging Koloniaal Institut.
Berichten van de Afdeeling Handels-museum (van de).
Afdeeling Handels-museum.
Jaarverslag.
Nederlandsche Entomologische Vereeniging.
Tijdschrift voor Entomologie (uitgegeven door de).
Entomologische Berichten (uitgegeven door de).
Société Hollandaise des Sciences a Harlem.
Archives Néerlandais des Sciences.
Exactes et Naturelles (publiés par la).
Serie III. A. Sciences Exactes.
Serie III. B. Sciences Naturelles.
Archives Néerlandais de Physiologie de l'Homme et des Animaux.

Hungría

Annales Historico-Naturales. Museis Nationales Hungaria.
Turistik. Alpinismus und Wintersport.

India

Calcutta Mathematical Society.
Bulletin.

Inglaterra

Archives of Medical Hydrology.
Cambridge Phylosophical Society.
Proceedings.
Geological Society of London.
The Quarterly Journal.
Geological Literature.
Mineralogical Abstracts.
Roads and Road Construction.
Royal Society of Edinburgh.
Proceedings.
The Cambridge Bulletin.
The Institutions of Civil Engineers.
Minutes of Proceedings.
Sessional Notices.
Selected Engineering Papers.
The Mineralogical Magazine and Journal of the Mineralogical Society y *Mineralogical Abstracts.*

Irlanda

Institution of Civil Engineers of Ireland.
Transactions.

Italia

Accademia di Agricoltura. Scienze e Lettere di Verona.
Atti e Memorie.
Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.
Rendiconti.
Annali di Economia (Università Bocconi).
Annali dei Lavori Pubblici.
Archivio di Storia della Scienza.
Circolo Matematico di Palermo.
Rendiconti.

Gazzetta Chimica Italiana.

Giornale di Chimica Industriale ed Applicata.

I. R. Accademia Roveretana degli Agiati.

Atti.

Il Monitore Tecnico.

Le vie d'Italia e dell'America Latina.

L'Electrotecnica.

L'Universo.

Museo Civico di Storia Naturale Giacomo Doria.

Annali.

R. Accademia dei Fisiocratici in Siena.

Atti.

R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Rendiconti.

Rendiconti dell'Adunananza Solenne.

Regia Scuola Superiore di Agricoltura in Portici.

Annali.

R. Stazione Chimico-Agraria di Torino.

Annuario.

Rivista d'Italia ed America.

Scientia.

Sindicato Nazionale Fascista Ingegneri.

Annali della Sezione di Roma.

Societá Geografica Italiana.

Bollettino.

Societá Italiana per il progresso delle Scienze.

Atti.

Societá Italiana di Scienze Naturali e del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

Atti.

Societá Medico-Chirurgica di Pavia.

Bollettino.

Societá Ligustica di Scienze e Lettere.

Atti.

Societá Meteorologica Italiana.

Bollettino.

Societá dei Naturalisti e Matematici di Modena.

Atti.

Societá Toscana di Scienze Naturali Residente in Pisa.

Memorie.

Processi Verbali.

Studi Sassaresi.

Unione Matematica Italiana.

Bollettino.

Japón

Annotationes Zoological Japonenses.
Faculty of Science.
Journal.
National Research Council of Japan.
Japanese Journal of Zoology (Transactions and Abstracts).
Japanese Journal of Physics (Transactions and Abstracts).
Physico- Mathematical Society of Japan.
Proceedings.
Suplementa Iconum Plantarum Formosanarum.
The Botanical Magazine.
The Chemical Society of Japan.
Bulletin.
The Chemical Technology.
The College of Science.
Memoirs (of):
Series A.
Series B.
The Journal of Geography.

Letonia

Acta Horti Botanici. Universitatis Latviensis.

Lituania

Institut de la Culture Blanche-Ruthenienne.
Section d'Art Blanche-Ruthénienne.
Section Agronomique.
Section Médicale.

México

American Institute of Electrical Engineers.
Boletín de la Sección de la Ciudad de México.
Dirección de estudios biológicos.
Boletín.
Instituto Geológico de México.
Anales.
Boletín.
Museo Nacional de Arqueología, Historia y Etnografía.
Anales.
Boletín.

Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya.
Anuario.
Boletín.
Observatorio Meteorológico y sismológico Central de México.
Boletín del Servicio Meteorológico Mexicano.
Revista Mexicana de Ingeniería y Arquitectura.
Secretaría de Agricultura y Fomento.
Boletín Oficial.
Sociedad Científica « Antonio Alzate ».
Memorias.
Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística.
Boletín.

Noruega

Det Norske Videnskaps. Akademie i Oslo.
Skrifter.
Avhandlinger.
Arbok.

Nueva Gales del Sud

Department of Mines.
Records.
Bulletin.

Nueva Zelandia

Dominion Museum.
Bulletin.
The New Zealand Institute.
Transactions and Proceedings.
The New Zealand Journal of Science and Technology.

Paraguay

Sociedad Científica.
Revista.
Anales Científicos Paraguayos.

Perú

Archivo Nacional del Perú.
Revista.
Boletín Bibliográfico (publicado por la Universidad Mayor de San Marcos).
Boletín de Minas, Industrias y Construcciones.
Cuerpo de Ingenieros de Minas.
Boletín.

Dirección de Minas y Petróleo del Ministerio de Fomento.
Boletín oficial de Minas y Petróleo.
Escuela de Ingenieros.
Memoria Anual.
Facultad de Ciencias.
Anales.
Inca.
Revista trimestral de estudios antropológicos.
Ministerio de Fomento.
Boletín.
Revista de Marina.
Sociedad Geográfica de Lima.
Boletín.
Sociedad Geológica del Perú.
Boletín.
Sociedad de Ingenieros del Perú.
Informaciones y Memorias.

Polonia

Prace Zoologiczne.

Portugal

Academia Polytechnica do Porto.
Annaes Scientificos.
Academia das Sciencias.
Boletim da Classe de Letras.
Jornal de Sciencias Mathematicas, Fisicas e Naturaes.
Faculdade de Sciencias.
Boletim Meteorologico Internacional (Observatorio Central Meteorologico.
Instituto de Criminologia.
Boletim.
O Instituto.
Sociedade Broteriana.
Boletim.
Sociedade de Geographia.
Boletim.
Universidade de Coimbra.
Ephemerides Astronomicas.
Observações Meteorologicas, Magneticas e Sismologicas (id).
Memorias e Estudos do Museum Zoologico.
Serviços de Marinha (Prov. de Mozambique).
Relatorio do Observatorio Campos Rodrigues.

Rumania

Académie Roumaine.

Bulletin de la Section Scientifique.

Gazeta Matematica.

Societatii Regale Române de Geografie.

Buletinul.

Rusia

Academia Agricultural y Económica de Siberia.

Publicaciones Trudi.

Académie des Sciences de Russie.

Bulletin.

Mémoires.

Acta Horti Petropolitani.

Comite Geologique.

Bulletins.

Matériaux pour la Géologie Générale et Appliquée.

Institut D'Essais de Semences.

Annales.

Institut des Recherches Biologiques et Station Biologique a L'Université de Perm.

Bulletin.

Musee Geologique et Mineralogique Pierre le Grand, pres L'Académie des Sciences de L. U. R. S. S.

Travaux.

Notulæ Systematicæ. Ex Instituto Criptogamico Horti Botanici Petropolitani.

Notulæ Systematicæ. Ex Herbario Horti Botanini Petropolitani.

Principal Jardin Botanique de la Republique Russe.

Bulletin.

Société Russe de Geographie.

Bulletin.

Société des Naturalistes de Moscou.

Bulletin.

Musée d'Etat de la Region Industrielle Centrale.

Mémoires.

Musée d'Ethnographie et d'Anthropologie de l'Ac. de Sciences.

Sociéts des Amis des Sciences Naturelles, d'Anthropologie et de Ethnographie.

Mémoires de la Section Géologique.

Mémoires de la Section Géographique.

Mémoires de la Section Botanique.

Mémoires de la Section Physiologique.

Mémoires de la Section Ethnographique.

Bulletins de la Station Biologique.

Société Physico-Chimique Russe.
Journal.
Université de L'Asie Centrale.
Bulletin.

Suecia

Geological Institution of the University of Upsala.
Bulletin.
Goteborgs Botaniska Tradgard.
Meddelanden.
Goteborgs Kungl. Vetenskapsoch Witterhets-Samhalles.
Handlingar.
Kongl. Svenska Vetenskaps- Akademiens.
Arkiv för Botanik.
Arklv för Matematik, Astronomi och Fisik.
Arkiv för Kemi, Mineralogi och Geologi.
Arkiv för Zoologi.
Handlingar.
K. Vetenskaps Akademiens.
Meddelanden (fran). Nobel Institut.
Kongl. Vetenskaps-Akademiens.
Ofversigt (af). Förhandlingar.
Sveriges Geologiska Undersokning.
Series.
Arsbók.
Zoologiska Bidrag Fran Upsala.

Suiza

Archivs Suisse d'Anthropologie Génerale.
Eidgenossischen Technischen Hochschule in Zurich.
Thèses.
Faculté des Sciences de L'Université de Neufchatel.
Thèses.
Geographisch-Ethnographischen Gesellschaft.
Mitteilungen.
Helvetica Chimica Acta.
Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen.
Société Neuchateloise de Geographie.
Bulletin.
Société Helvetique des Sciences Naturelles.
Actes.
Sociedad de las Naciones.
Boletín Mensual.

Ukrania

Académie des Sciences D'Ukraine.
Compte Rendu.
Comité Scientifique Agronomique de L'Ukraine.
Journal de la Science Agronomique.

Uruguay

Arquitectura.
Asociación Politécnica del Uruguay.
Revista.
Asociación Rural del Uruguay.
Revista.
Facultad de Medicina.
Anales.
Federación Rural.
Revista.
Museo de Historia Natural de Montevideo.
Anales.
Universidad.
Anales.
Ministerio de Industrias.

Venezuela

Archivo Nacional.
Boletín.
Boletín Comercial e Industrial.
El Libro Amarillo de los Estados Unidos de Venezuela.
Colegio de Ingenieros de Venezuela.
Revista.

Yugoeslavia

Narodina Starina.

SOCIOS ACTIVOS *(Continuación)*

Huergo, José M.
Hermida Álvarez, Ángel.
Iarcho, Pedro G.
Ivanissevich, Ludovico.
Izaguirre, Salvador T.
Jacobacci, Jaime.
Kohan, Zoilo.
Laclau, Narciso C.
Labarthe, Julio.
Lanfranco, Silvio.
Larco, Esteban.
Lasso, Alfredo.
Latzina, Eduardo.
Lavalle, Francisco P.
Lea, Allan B.
Leguizamón Pondal, Martno.
Lenhardtson, Emilio.
Logarzo, Miguel.
Loyarte, Ramón.
Lizer y Trelles, Carlos A.
Lombardi, Alberto,
López Pereyra, Benjamín.
Lorenzetti, Miguel V.
Lozano, Nicolás.
Lugones, Arturo M.
Luro, Rufino.
Madrid, Enrique de.
Mainini, Carlos.
Magnin, Jorge.
Magnin, Félix J.
Malloi, Emilio.
Mamberto, Benito.
Marín, Plácido.
Marcó del Pont, Enrique.
Marotta, Pedro.
Martínez, Benjamín D. (h.)
Massini, Carlos.
Mayol, J. A. Jorge.
Maza, Benedicto.
Medina, José A.
Melo, Carlos F.
Méndez, Julio.
Meoli, Gabriel.
Mercante, Víctor,
Mercau, Agustín.
Mermoz, Fco. Alberto.
Mey, Carlos V.
Mignaqui, Luis P.
Molfino, José F.
Molina Civit, Juan.
Molino Torres, Alejandro.
Morales, Carlos María.

Moreno, Evaristo V.
Moreno, Jorge.
Möhring, Walther.
Mosca, Juan José C.
Mulhall, Jaime.
Nally, Rosa A.
Narbondo, Juan L.
Nágera, Juan José.
Natale, Alfredo.
Négrete, Lucía.
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan.
Noceti, Domingo.
Novillo, Andrés B.
Ocampo, Manuel S.
Olivieri, Alfredo.
Ortiz de Rosas, Jorge.
Otamendi, Rómulo.
Otamendi, Gustavo.
Otamendi, Belisario.
Outes, Félix F.
Paez, José Ma.
Poiré, Arturo A.
Paitoví Oliveras, Antonio.
Palacio, Emilio.
Palma, Luis.
Palma, José M.
Paoli, Humberto J.
Parodi, Edmundo.
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Silvio E.
Pasman, Raúl G.
Pauly, Antonio.
Pastore, Franco.
Paquet, Carlos.
Paulsen, Emilio F.
Paz Anchorena, José M.
Péndola, Agustín.
Perazzo, Alberto A.
Pérez Hernández, Ángel.
Pestálardo, Agustín.
Piana, Juan S.
Piñero, Rodolfo.
Quartino, José N.
Raimondi, Alejandro.
Raffo, Bartolomé.
Rebuelto, Emilio.
Rebuelto, Antonio.
Renacco, Ricardo.
Repetto Blas, Ángel.
Roballos, Antonio L.
Rodríguez Aravena, Santos.

Roffo, Juan.
Roldán, Raimundo.
Rokotnitz, Otto.
Romero, Julián.
Romero, Antonio.
Rospide, Juan.
Rossell Soler, Pedro A.
Rubinstein, David.
Sabaría, Enrique.
Sabatini, Ángel.
Salomón, Hugo.
Sánchez Díaz, Abel.
Sánchez, José R.
Sánchez, Gregorio L.
Sanromán, Iberio.
Santángelo, Rodolfo.
Saporiti, Héctor J.
Saralegui, Luis.
Sarhy, Juan F.
Scala, Augusto.
Schaefer, Guillermo F.
Schnack Benno, J.
Schmiedel, Ottomar.
Schneidewind, Alberto.
Schoo Lastra, Oscar.
Selva, Domingo.
Senet, Rodolfo.
Sheahan, Juan F.
Spota, Víctor J.
Solari, Miguel A.
Solari, Emilio F.
Soler, Frank L.
Sobral, Arturo.
Soldano, Ferruccio A.
Spinetto, David J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto.
Tedeschi, Virgilio.
Tello, Eugenio.
Torre Bertucci, Pedro.
Torello, Pablo.
Trelles, Rogelio A.
Trovati, Francisco.
Uriarte Castro, Alfredo.
Uribe, Pedro.
Urondo, Franscisco E.
Vallebella, Colón B.
Valentini, Argentino.
Valençon, Luis A.
Valiente Noailles, Luis.
Valle, Juan A.
Vanossi, Reinaldo.

SOCIOS ACTIVOS *(Conclusión)*

Varela, Rufino (hijo).
Vidal, Antonio.
Volpatti, Eduardo.
Wauters, Carlos.
Williams, Adolfo T.
White, Guillermo J.
Wenzel, Carlos.
Zuloaga, Ángel M.

SOCIOS ADHERENTES

Balbiani, Atilio.
Basterreix, Francisco.
Bazzanella, José.
Dorado, Luis.
Gandolfo José S.
Goñi, José.
Lambertini, Miguel.
Liebermann, José.
Massone, Atilio.
Nicola, Carlos de.
Pascual, Oliveras Antonio.
Peirano, Santiago F.
Pelosi, Elías.
Pini, Aldo S.
Repetto, Cayetano.
Soler, Antonio L.
Sáenz Valiente, Casto.
Vernengo, Roberto E.
Vidal, Eduardo.
Vignaux, Juan C.
Weinstock, Zelman.
Zanalda, David M.
Zanetta, Alberto J.
Zanetta, Atilio.

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás.
Tornquist, Ernesto y Comp. (Lim.).